УДК 512.24

Д. Г. ЛЕВЧЕНКО, Н. П. ШИШКО

(Москва)

СПОСОБ РАЗДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Во многих случаях измерительной практики возникает задача раздельного измерения нескольких случайных сигналов, полученных от ряда неселективных датчиков. В [1, 2] рассматривались различные аспекты этой задачи и некоторые пути ее решения. Однако при этом возникала существенная трудность, заключающаяся в необходимости решения системы нелинейных (квадратичных) уравнений. Общая теория точного решения таких систем (выше второго порядка) в настоящее время, по-видимому, не разработана. В предлагаемой работе сделана попытка обойти эту трудность путем составления и решения характеристических уравнений пучка эрмитовых форм, соответствующих корреляционным матрицам измеряемых сигналов. При этом главные векторы пучка образуют столбцы матрицы, мономиализирующей матрицу коэффициентов передачи измерительных каналов, что и определяет возможность разделения измеряемых сигналов.

Согласно [1], полагаем, что известна корреляционная матрица сигналов на выходе системы неселективных датчиков

$$R = KVK^*, \tag{1}$$

где $V = \left[\overline{e_i^2}(\tau)\right]$ — неизвестная диагональная матрица, элементы ее — положительные функции от τ; K — неизвестная постоянная матрица с комплексными элементами, $\det K \neq 0$; K^* — транспонированная и комплексно-сопряженная для K матрица.

Требуется найти матрицу L такую, что LRL^* является диагональной матрицей, а LK — по крайней мере, мономиальной [3] при любом τ.

Доказательство существования такой матрицы L проведем следующим образом. Введем матрицы $K_1 = K\sqrt{V(0)}$ и $V_1 = VV^{-1}(0)$, где $V(0)$ — это V при $\tau=0$; тогда

$$R = K_1 V_1 K_1^* ; \quad V_1(0) = E. \tag{2}$$

Матрица $\sqrt{V(0)}$ положительна, так как $V(0)$ — положительная диагональная матрица [4]. Составим характеристическое уравнение пучка эрмитовых форм, соответствующих матрицам $R(\tau)$ и $R(0)$:

$$|R(\tau) - \lambda R(0)| = 0 - \tag{3}$$

и преобразуем его с учетом (2):

$$|K_1| \, |K_1^*| \, |V_1(\tau) - \lambda V_1(0)| = 0. \tag{4}$$

Поскольку матрица $V_1(\tau) - \lambda V_1(0)$ диагональная, (4) можно записать так:

$$|K_1| \, |K_1^* \prod_{j=1}^{p} \{V_j(\tau) - \lambda\} = 0. \tag{5}$$

По условию $\det K \neq 0$, а значит, и $\det K_1 = \det K_1^* \neq 0$; отсюда следует

$$V_{j_i}(\tau) = \lambda_i; \quad i = 1, \ldots, p; \quad j_i = 1, \ldots, p, \tag{6}$$

где λ_i — характеристические числа пучка. Из (6) видно, что все λ_i — вещественные положительные функции от τ. Главный вектор L_i, соответствующий характеристическому числу λ_i пучка форм (4), определяется равенством

$$R(\tau) L_i - \lambda_i R(0) L_i = 0, \tag{7}$$

или

$$R^{-1}(0) R(\tau) L_i - \lambda_i L_i = 0. \tag{8}$$

Матрица $R^{-1}(0) \; R(\tau)$ в общем случае неэрмитова. Преобразуем ее, введя эрмитову матрицу $S = \sqrt{R^{-1}(0)} \, R(\tau) \sqrt{R^{-1}(0)}$; тогда

$$R^{-1}(0) R(\tau) = \sqrt{R^{-1}(0)} \, S \sqrt{R(0)}, \tag{9}$$

где $\sqrt{R(0)}$ — матрица преобразования подобия. Известно, что эрмитова матрица (и ей подобная) имеет простую структуру, вещественные характеристические числа и ортонормированные главные векторы. Матрица L, столбцами которой являются главные векторы L_i, одновременно приводит формы (3) к диагональному виду [4]:

$$L^*(\tau) R(\tau) L(\tau) = \Delta(\tau); \tag{10}$$

$$L^*(\tau) R(0) L(\tau) = E. \tag{11}$$

Подставляя (2) в (11) получаем

$$L^*(\tau)K_1K_1{}^*L(\tau)=E. \tag{12}$$

что означает унитарность матрицы $L^*(\tau)K_1$. Подставляя (2) в (10) и учитывая (12), получаем

$$L^*(\tau)K_1V_1(\tau)=\Lambda(\tau)L^*(\tau)K_1. \tag{13}$$

Отсюда следует

$$\{L^*(\tau)K_1\}_{ij}\{V_j(\tau)-\lambda_i(\tau)\}\equiv 0 \tag{14}$$

или, подставляя (8),

$$\{L^*(\tau)K_1\}_{ij}\{V_j(\tau)-V_{j_i}(\tau)\}\equiv 0. \tag{15}$$

При $j=j_i$ функции $V_j(\tau)$ и $V_{ji}(\tau)$ совпадают в не более чем счетном множестве точек τ_α, так как различные действительные аналитические функции могут совпадать в не более чем счетном множестве точек [5]. Поэтому $\{L^*(\tau)K_1\}_{ij}=0$ при $j\neq j_i$, за исключением точек τ_α. Из условия непрерывности функций $L(\tau)$ следует

$$\{L^*(\tau)K_1\}_{ij}\equiv 0 \text{ при } j\neq j_i. \tag{16}$$

Из невырожденности $L^*(\tau)K$ и равенства (16) получаем

$$\{L^*(\tau)K_1\}_{ij}\neq 0;\quad i=1,\ldots,p;\quad j_i=1,\ldots,p, \tag{17}$$

т. е. матрица $L^*(\tau)K_1$ мономиальна.

Учитывая унитарность этой матрицы, имеем

$$\left|\{L^*(\tau)K_1\}_{ij_i}\right|=1, \tag{18}$$

т. е. модули ее элементов постоянны и равны единице. Поскольку L^*_{ij} — аналитическая функция, а K_1 — постоянная матрица, из принципа максимума модуля аналитической функции [5] вытекает, что $L_{ij}(\tau)=\text{const}$, т. е. L — постоянная матрица. Так как $K_1=K\sqrt{V(0)}$, то

$$\left|\{L^*K\}_{ij}\right|=\begin{cases}0; & j=j_i;\\ 1\big/\sqrt{V_{j_i}(0)}; & j\neq j_i.\end{cases} \tag{19}$$

Таким образом, разделение сигналов описанным способом возможно с точностью до нормирующего множителя $1\big/\sqrt{V_{j_i}(0)}$ при нормировке единичной сферой $\alpha_i{}^*R(0)\alpha_i=1$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Г. Левченко. К вопросу об измерении в недоступной области.— Труды I симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», т. I. Новосибирск, СНИИМ, 1968.
2. Д. Г. Левченко. Вопросы разделения сигналов, отличающихся функциями автокорреляции.— Труды III симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», т. I. Л., ВНИИЭП, 1970.
3. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1966.
4. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
5. А. В. Бицадзе. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию 14 июня 1972 г.