АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1973

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 681.2.083

Е. И. КОРОЛЬ, И. А. НАЗАРОВ,
П. В. НОВИЦКИЙ, М. ПРЫВЧЕВА

(Ленинград, Варна)

К ВОПРОСУ О ГРАНИЦАХ РАЗНООБРАЗИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Введение. Стандарт ГОСТ 8.011-72 «Государственная система обеспечения единства измерений. Результаты измерений. Показатели точности, достоверности и формы представления» требует, чтобы при сообщении о погрешности результата измерения, кроме математического ожидания и среднеквадратического отклонения, указывался вид закона распределения вероятностей («нормальный», «треугольный», «равномерный» и т. д.).

Однако вопрос о видах законов распределения вероятностей погрешностей остается еще весьма слабо изученным.

Полагая практически справедливой аксиому симметрии случайных погрешностей [2], можно ограничиться рассмотрением только симметричных законов распределения. Они различаются между собой по величине эксцесса или относительного четвертого момента μ_4/σ^4, который, например, для дискретного двухмодального распределения равен 1, для нормального — 3, а для закона распределения Коши стремится к бесконечности. Для классификации законов распределения по этому признаку удобнее пользоваться обратной величиной $\sigma^2/\sqrt{\mu_4}$ [3], изменяющейся в пределах от 0 до 1.

Однако при информационном анализе измерений важен учет энтропии случайных погрешностей, выражаемой, согласно [4, 5], величиной так называемого «эквивалентного деления» или половиной этой величины, названной в [6] энтропийным значением Δ случайной величины и определяемой как

$$\Delta = \frac{1}{2} e^{H(x)},$$

где $H(x) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx$; $p(x)$ — плотность распределения. При этом оказывается, что распределения с данным относительным четвертым моментом могут иметь различные значения энтропийного коэффициента $K=\Delta/\sigma$ [3, 6] и, наоборот, распределения с одинаковыми значениями K могут иметь различные значения относительного четвертого момента.

С учетом этого в [3] было предложено классифицировать законы распределения одновременно по обеим этим координатам, т. е. характеризовать их точкой в плоскости с координатами $K=\Delta/\sigma$ и $\varkappa=\sigma^2/\sqrt{\mu_4}$. Расчет этих координат для экспериментально определенных законов распределения погрешностей разнообразных приборов (стрелочных, электронных, цифровых) показывает, что соответствующие им точки в координатах K и $\varkappa$ располагаются так, как это показано на рис. 1, т. е. занимают большую область, простирающуюся от 0,25 до 0,75 по $\varkappa$ и от 1 до 2,07 по K. При этом обычно принимаемые при теоретическом анализе погрешностей нормальный (точка *1* на рис. 1) или равномерный (точка *2*) законы распределения оказываются весьма мало представительными, так как соответствую-

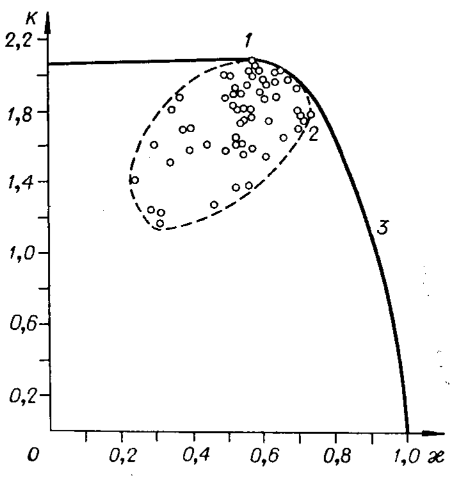

Рис. 1.

щие им точки лежат на самом краю области фактически встречающихся законов распределения погрешностей.

В этих условиях возникает вопрос об установлении теоретических границ разнообразия симметричных законов распределения в координатах рис. 1, что и является задачей настоящей статьи.

Состояние вопроса и постановка задачи. К. Шеннон показал, что при заданной дисперсии наибольшей энтропией обладает нормальное распределение с $H = \ln\sqrt{2\pi e\sigma}$, энтропийный коэффициент которого равен

$$K = \frac{\Delta}{\sigma} = \frac{\sqrt{2\pi e\sigma}}{2\sigma} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}} \approx 2{,}066 \qquad \text{(точка } 1\text{)}.$$

В [7, 8] эта задача была решена для одновременно заданных второго и четвертого центральных моментов. С помощью метода неопределенных множителей Лагранжа было показано, что максимально возможными значениями K при различных значениях $\varkappa$ обладают распределения вида

$$p(x) = Ae^{-\beta x^4 - \gamma x^2},$$

где A, β и γ определяются из условий:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \sigma^2, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 p(x)dx = \mu_4,$$

т. е. в области $1/\sqrt{3} = 0{,}577 < \varkappa < 1$ максимальные значения плавных симметричных законов распределения ограничены, согласно [7], кривой *3*, приведенной на рис. 1.

Таким образом, дальнейшему исследованию подлежит установление границы максимально возможных значений K в области $0 < \varkappa < 0{,}577$ и расположение различных законов внутри этой области.

Метод исследования и результаты. В настоящей работе рассматривается симметричное распределение случайной величины вида

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha+1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)} |x|^{\alpha} & \text{при } |x| \leqslant 1; \quad \alpha > -1; \\ \dfrac{(\alpha+1)(\beta-1)}{2(\alpha+\beta)} |x|^{-\beta} & \text{при } |x| \geqslant 1; \quad \beta \geqslant 5. \end{cases} \qquad (1)$$

Графики этой функции при различных значениях α, β показаны на рис. 2, откуда видно, что при изменении α, β это выражение описывает различные законы распределения. Если $\alpha = 0$ (кривая *1*), распределение имеет плоскую вершину и уходящие в бесконечность края. При $\alpha > 0$ получается семейство двухмодальных законов распределения (кривая *2* — $0 < \alpha < 1$, кривая *3* — $\alpha = 1$, кривая *4* — $\alpha > 1$). При отрицательных значениях α распределения имеют вид кривых *5* и *6*.

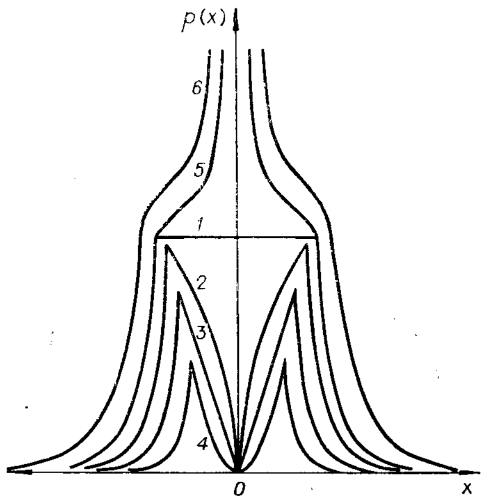

Рис. 2.

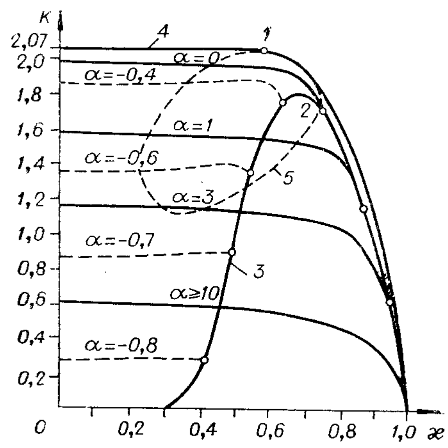

Рис. 3.

Для законов, описываемых (1), β может меняться в пределеах $5 \leqslant \beta < \infty$, однако при $\beta \to \infty$ получаются фактически ограниченные законы распределения. Для них плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\alpha+1}{2}|x|^{\alpha}, & \text{если} \quad |x| \leqslant 1; \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1. \end{cases} \tag{2}$$

Результаты вычисления значений K и $\varkappa$ для распределений типа (2) представлены в виде кривой *3* на рис. 3. Если $\alpha = 0$, получаем равномерное распределение с $K = 1{,}73$ и $\varkappa = 0{,}745$ (точка *2* на кривой *3*). Если $\alpha > 0$, имеем распределение с $\varkappa > 0{,}745$ и значения K лежат справа от точки *2*. Если $\alpha < 0$, имеем распределения с $\varkappa < 0{,}745$ и значения K лежат слева от точки 2 на кривой *3*.

Для распределения типа (1) получаются кривые, начинающиеся от оси ординат ($\beta = 5$) и заканчивающиеся ($\beta \to \infty$) на кривой *3* справа от точки *2* при $\alpha \geqslant 0$ (сплошные кривые) и слева от точки *2* при $-1 < \alpha < 0$ (штриховые кривые).

Из рис. 3 видно, что при изменении α и β кривые описывают всю плоскость, включая и неизвестную до сих пор область ($0 < \varkappa < 1/\sqrt{3}$). При этом оказывается, что если кривые распределения описать вместо (1) на участке $|x| \leqslant a$ усеченным нормальным распределением, а на участках $|x| \geqslant a$ — концами распределения (1) при $x/a \geqslant 1$, то K для таких законов сколь угодно близко приближается к $K = \sqrt{\frac{\pi e}{2}} \approx 2{,}066$ на всем интервале $0 \leqslant \varkappa < 0{,}577$.

Выводы

Экстремальное решение [7] может быть продолжено налево параллельно оси $\varkappa$ до пересечения с осью K (прямая *4* рис. 3), так как рассмотренные распределения заполняют область от 0 до 0,577 и далее по $\varkappa$ и сколь угодно близко приближаются к $K = 2{,}066$ снизу, не превосходя границу, соответствующую экстремальному решению К. Шеннона.

На рис. 3 нанесены границы области фактически встречающихся законов распределения погрешностей в виде кривой *5*, откуда видно, что подобные законы можно эквивалентно характеризовать с помощью распределения (1) или (2), т. е. путем численного указания значений α и β.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стандарт ГОСТ 8.011-72 «Государственная система обеспечения единства измерений. Показатели точности и формы представления результатов измерения».
2. М. Ф. Маликов. Основы метрологии. Ч. 1. Учение об измерении. Коммерприбор, 1949.
3. В. Я. Иванова, Г. А. Кондрашкова, И. А. Назаров, П. В. Новицкий. Сравнение оценок погрешности измерения по энтропийному, среднеквадратическому и предельному значениям.— Измерительная техника, 1966, № 9.
4. В. И. Рабинович, М. П. Цапенко. Количество информации при равномерном распределении измеряемой величины и погрешности.— Измерительная техника, 1963, № 6.
5. В. И. Рабинович, М. П. Цапенко. Информационные характеристики средств измерения и контроля. М., «Энергия», 1968.
6. П. В. Новицкий. Основы информационной теории измерительных устройств. Л., «Энергия», 1968.
7. И. А. Назаров. К вопросу о предельных значениях энтропийного коэффициента.— Известия ЛЭТИ, 1967, вып. 66, ч. 1.
8. О. Е. Трофимов. Оценка сверху для энтропии непрерывных случайных величин при фиксированных значениях моментов.— Информационные методы в системах управления, измерения и контроля. Владивосток, Изд-во Дальневосточного филиала СО АН СССР, 1968.

Поступило в редакцию 4 августа 1971 г.,
окончательный вариант — 20 декабря 1971 г.