

3. William W. Моуег. A High — Speed Indexing Unit for FFT Algorithm Implementation. — Computer Design, 1971, v. 10, № 12.
 4. В. М. Ефанов, И. И. Коршевер, В. М. Лобастов, Г. Г. Матушкин. Структура многофункционального процессора на основе алгоритма быстрого преобразования Фурье. — Автометрия, 1973, № 3.

Поступила в редакцию 12 октября 1972 г.

УДК 517.52 : 519.24

В. М. ЕФАНОВ, И. И. КОРШЕВЕР, В. М. ЛОБАСТОВ

(Новосибирск)

О ВЫЧИСЛЕНИИ МГНОВЕННОГО СПЕКТРА

Постановка задачи. При анализе случайных процессов [1], в частности при решении задач распознавания образов, требуется вычисление «скользящего» мгновенного спектра процесса $f(t)$:

$$S'_\tau(\omega) = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T+\tau} f(t) e^{-i\omega t} dt; \quad (1)$$

здесь T — длительность временного окна. Если временной сдвиг τ изменяется дискретно, то (1) принимает вид

$$S'_i(\omega) = \frac{1}{T} \int_{i\Delta\tau}^{T+i\Delta\tau} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2)$$

где $\Delta\tau$ назовем шагом скольжения ($\Delta\tau < T$). В случае дискретного преобразования Фурье (ДПФ)

$$S'_i(r) = \frac{1}{N} \sum_{k=in}^{N+in-1} f(k) e^{-\frac{j2\pi rk}{N}} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k+in) e^{-\frac{j2\pi rk}{N}} \right] e^{-\frac{j2\pi nr}{N}}, \quad (3)$$

где $r=0, 1, \dots, N-1$; $i=0, 1, \dots, \infty$; $N = \frac{T}{\Delta t}$; $n = \frac{\Delta\tau}{\Delta t}$; Δt — шаг квантования по времени процесса $f(t)$. В (3) выражение, стоящее в квадратных скобках

$$S_i(r) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_i(k) e^{-\frac{j2\pi rk}{N}}, \quad (4)$$

представляет собой ДПФ подпоследовательностей $f(k+i) = f_i(k)$, смещенных во временной области к началу координат.

На практике обычно интересуются амплитудным спектром, вычисление которого по (3) и (4) дает один и тот же результат, т. е. $|S'_i(r)| \equiv |S_i(r)|$. Фазовый множитель в (3) $e^{-\frac{j2\pi nr}{N}}$ информации о процессе не содержит и учитывает лишь временной сдвиг подпоследовательностей $f_i(k)$. Поэтому в дальнейших рассуждениях имеется в виду вычисление «скользящего» мгновенного спектра по выражению (4).

Для перекрывающихся подпоследовательностей $f_i(k)$ ($\Delta\tau < T$) вычисление ДПФ по (4) связано с необходимостью повторного выполнения ряда операций. Это ведет при непосредственном определении

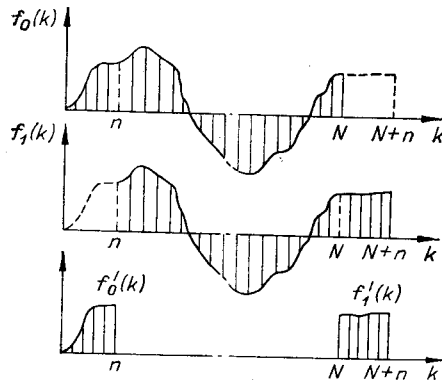


Рис. 1.

Пусть $f_0(k) \leftrightarrow S_0(r)$. Последовательность $f_1(k)$ может рассматриваться как сумма

$$f_1(k) = f_0(k) + f'_1(k) - f'_0(k) \leftrightarrow S_1(r) = S_0(r) + S'_1(r) - S'_0(r),$$

где

$$S'_0(r) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f'_0(k) e^{-\frac{j2\pi rk}{N}}; \quad (5)$$

$$S'_1(r) = \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{2N-1} f'_1(k) e^{-\frac{j2\pi rk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f'_1(k+N) e^{-\frac{j2\pi rk}{N}}. \quad (6)$$

Тогда

$$S_1(r) = S_0(r) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [f'_1(k+N) - f'_0(k)] e^{-\frac{j2\pi rk}{N}} = S_0(r) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} [f'_1(k+N) - f_0(k)] e^{-\frac{j2\pi rk}{N}}, \quad (7)$$

так как $f'_0(k)$ и $f'_1(k+N)$ существуют при $0 \leq k \leq n-1$. Выражение (7) совпадает с $S_1(r)$, определяемой по формуле (3). Таким образом, ДПФ от $f_1(k)$ получается из ДПФ от $f_0(k)$ путем суммирования с ДПФ от разности $[f'_1(k+N) - f_0(k)]$. Последовательность $f_1(k)$ сдвинута вправо относительно начала координат на величину n . Из практических соображений удобно выбирать $n=2^p$. Для приведения последовательности $f_1(k)$ к началу координат, что требуется для следующего шага вычислений, необходим ее сдвиг влево на n выборок, что в спектральной области соответствует умножению $S_1(r)$ на фазовый множитель $e^{\frac{j2\pi rn}{N}}$.

После сдвига имеем

$$S_1(r) \left\{ S_0(r) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} [f'_1(k+N) - f_0(k)] e^{-\frac{j2\pi rk}{N}} \right\} e^{\frac{j2\pi rn}{N}} \quad (8)$$

ДПФ от $f_1(k)$, совпадающее с определенным по формуле (4). Вообще,

$$S_{i+1}(r) = \left\{ S_i(r) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} [f'_{i+1}(k+N) - f_i(k)] e^{-\frac{j2\pi rk}{N}} \right\} e^{\frac{j2\pi rn}{N}}, \quad (9)$$

или

$$S'_{i+1}(r) = S'_i e^{\frac{j2\pi rn}{N}} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} [f'_{i+1}(k+N) - f_i(k)] e^{-\frac{j2\pi rk}{N}}. \quad (10)$$

«скользящего» спектра процесса $f(k)$ к избыточности вычислений. Задача состоит в том, чтобы исключить эту избыточность и по возможности привести процедуру вычисления к виду, удобному для использования в процессоре, реализующем алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Процедура вычислений. Для выяснения процедуры вычисления рассмотрим ДПФ от двух отрезков процесса, сдвинутых один относительно другого на шаг скольжения $\Delta\tau = n\Delta t$ (рис. 1).

Как нетрудно видеть, $S_i(r) = S'_i(r) e^{\frac{j2\pi rn}{N}}$. Рекуррентные формулы (9), (10) показывают, как может быть получено ДПФ последовательности $f_{i+1}(k)$ по ДПФ последовательности $f_i(k)$. Процедура такого вычисления следующая:

1) находится разность подпоследовательностей

$$f'_{i+1}(k+N) - f'_i(k) \quad (0 \leq k \leq n-1);$$

2) вычисляется ДПФ разности последовательностей $f'_{i+1}(k+N) - f'_i(k)$ по интервалу N ;

3а) или полученный в п. 2 результат складывается с результатом предыдущих вычислений $S_i(r)$ и результат суммирования умножается на фазирующий множитель $e^{\frac{j2\pi rn}{N}}$, что соответствует сдвигу временной последовательности $f_{i+1}(k)$ к началу координат [выражение (9)];

3б) или полученный в п. 2 результат складывается с результатом предыдущих вычислений $S'_i(r)$, предварительно умноженным на $e^{\frac{j2\pi rn}{N}}$. При этом получаем результат $S'_{i+1}(r)$, соответствующий сдвинутой вправо на n выборок относительно начала координат последовательности $f_{i+1}(k)$ [выражение (10)].

Оценка погрешностей вычисления. Прежде всего рассмотрим последовательно вычисление «скользящего» мгновенного спектра процесса, показанного на рис. 2, в предположении, что сигнал существует при $t \geq 0$. Отсюда и далее предполагаем $N=2^M$; $n=2^p$; $m=2^{M-p}$. Пусть необходимо вычислять «скользящий» мгновенный спектр по интервалу $N\Delta t$ при шаге скольжения $n\Delta t$. Тогда для первого шага, согласно описанной выше процедуре, необходимо вычислять преобразование Фурье от отрезка $A_1 - F(A_1)$, умножив его затем на фазирующий множитель $W = e^{\frac{j2\pi rn}{N}}$, т. е. $S_1 = F(A_1)W$. Второй и следующий шаги запишутся в виде:

$$S_2 = [F(A_2) + S_1] W = [F(A_2) + F(A_1)W] W = F(A_2)W + F(A_1)W^2;$$

$$S_3 = [F(A_3) + S_2] W = F(A_3)W + F(A_2)W^2 + F(A_1)W^3;$$

$$\dots$$

$$S_m = [F(A_m) + S_{m-1}] W = F(A_m)W + \dots + F(A_2)W^{m-1} + F(A_1)W^m;$$

$$S_{m+1} = [F(A_{m+1} - A_1) + S_m] W = F(A_{m+1} - A_1)W + F(A_m)W^2 + \dots$$

$$\dots + F(A_2)W^m + F(A_1)W^{m+1} = F(A_{m+1})W + F(A_m)W^2 + \dots + F(A_2)W^m;$$

(11)

$$S_{km+i} = [F(A_{km+i} - A_{(k-1)m+i}) + S_{km+i-1}] W = F(A_{km+i} - A_{(k-1)m+i})W +$$

$$+ \dots + F(A_{(k-1)m+i} - A_{(k-2)m+i})W^{m+1} + \dots + F(A_2)W^{km+i-1} +$$

$$+ F(A_1)W^{km+i} = F(A_{km+i})W + F(A_{km+i-1})W^2 + \dots + F(A_{(k-1)m+i+1})W^m.$$

Из соотношений (11) можно видеть, что выражения для вычисления результатов $(m+1)$ и последующих шагов приводятся к форме уравнения для m -го шага в случае точного соблюдения двух условий:

$$1) W^1 = W^{m+1}; \quad (12)$$

$$2) F(A_{km+i} - A_{(k-1)m+i}) + F(A_{(k-1)m+i} - A_{(k-2)m+i}) = F(A_{km+i}) -$$

$$- F(A_{(k-2)m+i}). \quad (13).$$

В этом случае оценки среднеквадратичной погрешности на следующих после m шагах будут соответствовать оценкам m -го шага. Но, согласно

описанной выше процедуре, оба условия с учетом конечной разрядности (B в битах) арифметического устройства будут выполняться приближенно по следующим причинам: приближенное выполнение первого условия связано с тем, что вычисление W^{m+1} осуществляется m -кратным умножением W^1 , а второго — с вычислением ДПФ от разных величин $(A_{km+i} - A_{(k-1)m+i})$ и $(A_{(k-1)m+i} - A_{(k-2)m+i})$, в связи с чем происходит неполная компенсация $F(A_{(k-1)m+i})$ в левой части равенства (13). Следствием этого является возникновение погрешностей, которые на $(m+1)$ -м и последующих шагах можно выразить в виде:

$$\Delta S_{m+1} = F(A_{m+1} - A_1)W - F(A_{m+1})W + F(A_1)W^{m+1} = [F(A_{m+1} - A_1) - F(A_{m+1}) + F(A_1)W^m]W = \Delta\varphi'_{m+1}W = \Delta\varphi_{m+1}.$$

$$\Delta S_{m+2} = [F(A_{m+2} - A_2) - F(A_{m+2}) + F(A_2)W^m]W + [F(A_{m+1} - A_1) - F(A_{m+1}) + F(A_1)W^m]W^2 = \Delta\varphi'_{m+2}W + \Delta\varphi'_{m+1}W^2 = \Delta\varphi_{m+2} + \Delta\varphi_{m+1}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{km+i} &= [F(A_{km+i} - A_{(k-1)m+i}) - F(A_{km+i}) + F(A_{(k-1)m+i})W^m]W + \\ &+ \dots + [F(A_{m+1} - A_1) - F(A_{m+1}) + F(A_1)W^m]W^{(k-1)m+i} = \Delta\varphi'_{km+i}W + \\ &+ \dots + \Delta\varphi'_{m+1}W^{(k-1)m+i} = \Delta\varphi_{km+i} + \dots + \Delta\varphi_{m+1}. \end{aligned}$$

Для определения верхней оценки дисперсии погрешности ΔS_{km+i} на любом шаге $(km+i)$ положим составляющие $\Delta\varphi_j$ независимыми центрированными ($M[\Delta\varphi_j(r)] = 0$) функциями частоты r , имеющими дисперсии

$$D_j = \overline{|\Delta\varphi_j(r)|^2}. \quad \text{Учитывая, что } S_{km+i}(r) = \sum_{t=m+i}^{km+i} \Delta\varphi_j(r), \text{ имеем [2]}$$

$$D[\Delta S_{km+i}] = \sum_{j=m+i}^{km+i} D_j, \quad (15)$$

откуда видно, что дисперсия погрешности вычисления «скользящего» мгновенного спектра возрастает с увеличением числа шагов скольжения.

Наметим пути ликвидации расходимости дисперсии погрешности вычислений. Эти пути должны в той или иной мере вести к устранению причин расходимости, т. е. должны способствовать более точному выполнению рассмотренных выше двух условий. Точное выполнение второго условия (13) возможно, если на каждом шаге вычисляются не ДПФ разности двух отрезков процесса, а разность ДПФ этих отрезков. Это, естественно, ведет к определенному увеличению числа необходимых вычислительных операций. Первое условие может быть точно выполнено, если (при этом имеем в виду, что второе условие тоже выполняется точно) вычисления производятся в виде

$$S_{km+i} = [F(A_{km+i}) + S_{km+i-1}]W - F(A_{(k-1)m+i})W^{m+1}. \quad (16)$$

Такие вычисления требуют запоминания (или вычисления) для всех частот значений W^{m+1} , отличающихся от W^1 на погрешность округления,

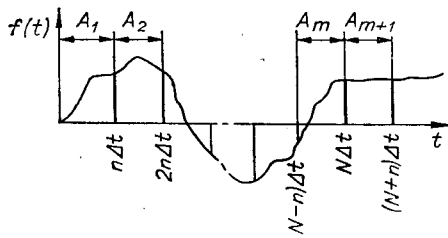


Рис. 2.

что связано с некоторыми аппаратными усложнениями. Кроме этих мер, можно указать на возможность ограничения роста погрешности вычислений допустимой величиной путем начала рекуррентной процедуры периодически с первого шага (т. е. стиранием вычисленных ранее результатов). Это ведет к некоторому искажению информации об ана-

лизируемом процессе в течение m шагов после каждого начала процедуры. В случае, если такое искажение недопустимо, можно после каждого стирания результатов предыдущих вычислений производить вычисление ДПФ следующих N выборок процесса по алгоритму БПФ, после чего, используя результаты этого вычисления в качестве реперной точки, вести дальнейшие вычисления по предложенной здесь процедуре. Увеличение разрядности арифметического устройства и использование арифметики с плавающей запятой могут рассматриваться как меры, замедляющие рост рассматриваемой погрешности.

Как ранее было указано, в случае точного выполнения условий (12), (13) оценки среднеквадратичной погрешности на следующих после m шагах будут соответствовать оценкам m -го шага. Произведем эти оценки. Для этого, во-первых, вычислим дисперсию $F(A_i)$. Согласно методике, предложенной в [3], полагая, что вычисления производятся в арифметическом устройстве с фиксированной запятой с разрядностью B и что все итерации включают умножения, а число итераций p , получим для верхней оценки

$$D[F(A_i)] = 2^p(1+2+2^2+\dots+2^{p-1})6\Delta^2+2^{p+1}(1+2+2^2+\dots+2^{p-1})\Delta^2+p2^pK\Delta^2+2^p\delta^2, \quad (17)$$

где $\Delta^2=2^{-2B}/12$ — дисперсия погрешности от округления до B произведения двух B -битовых слов; $6\Delta^2=2^{-2B}/2$ — дисперсия погрешности, возникающей от сдвига вправо на бит из-за переполнения при суммировании; δ^2 — дисперсия погрешностей начальных выборок процесса (за счет

квантования по уровню; $K = \overline{|X_0(k)|^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_0(k)|^2$ — средний квадрат модуля начальных выборок. Верхняя оценка дисперсии получена в

предположении, что на каждой итерации возникают переполнения и требуется сдвиг на бит вправо.

Для нижней оценки, полагая, что при вычислении не возникает переполнений, имеем

$$D[F(A_i)] = (1+2+\dots+2^{p-2}+2^{p-1})\Delta^2+p2^pK\Delta^2+2^p\delta^2. \quad (18)$$

Из формул (11) следует, что каждый шаг вычисления имеет вид

$$C_i = (a + C_{i-1})W = \varepsilon W, \quad (19)$$

где ε , C_i , a , W можно полагать в общем случае независимыми случайными комплексными числами. Тогда

$$\operatorname{Re}C_i = \operatorname{Re}\varepsilon \operatorname{Re}W - \operatorname{Im}\varepsilon \operatorname{Im}W; \quad \operatorname{Im}C_i = \operatorname{Re}\varepsilon \operatorname{Im}W + \operatorname{Im}\varepsilon \operatorname{Re}W.$$

Дисперсия C_i должна вычисляться по формуле [2]

$$D(C_i) = D(\varepsilon) + D(W) \overline{|\varepsilon|^2} + \theta = D(a) + D(C_{i-1}) + D(W) \overline{|a + C_{i-1}|^2} + \theta, \quad (20)$$

где θ — дисперсия от сдвига и округления при умножении. Из (19) замечаем, что $\overline{|C_i|^2} = \overline{|a + C_{i-1}|^2} \overline{|W|^2}$. Для верхней оценки можно принять $\overline{|C_i|^2} = (\overline{|a|^2} + \overline{|C_{i-1}|^2}) \overline{|W|^2}$. Так как $\overline{|W|^2} = 1$, то $\overline{|C_i|^2} = \overline{|a|^2} + \overline{|C_{i-1}|^2}$. Для m -го шага $\overline{|C_m|^2} = m \overline{|a|^2} = 2^m K$, с учетом того, что $\overline{|a|^2} = 2^p K$. Из процедуры вычисления также видно, что переполнения возникают не на каждом шаге, а для верхней оценки; учитывая характер роста среднего квадрата модуля, можно считать, что переполнения следуют через число шагов, подчиняющееся двоичному закону, т. е. через $2, 4, 8, \dots, 2^{m-p-1}$ число шагов. Учитывая это, по методике [3] дисперсия результата первого шага вычислений равна

рацией понимается одно комплексное умножение и одно комплексное сложение). Такое же число операций требуется каждый раз для вычисления спектра при сдвиге на один шаг. Оценим требуемое число операций по описанному алгоритму при нахождении спектра процесса, сдвинутого на шаг, по спектру предыдущего отрезка процесса. Как следует из изложенного, для такого вычисления требуется p итераций при вычислении БПФ разностей и одна итерация для сложения с предыдущим результатом и умножения на фазирующий множитель. При этом n сложениями для нахождения разностей $(A_{m+i} - A_i)$ можно пренебречь ввиду того, что шаг скольжения обычно много меньше N , т. е. $N \gg n$, поэтому общее число операций равно $N(p+1) = N(\log_2 n) + 1$. Получаемый выигрыш в числе операций

$$\alpha = \frac{\log_2 N}{(\log_2 n) + 1}. \quad (25)$$

Так, например, при $N=4096$ и $n=128$ получаем сокращение числа операций ориентировочно на 50%; при $N=1024$, $n=16$ — выигрыш вдвое. Естественно, выигрыш в числе операций растет с увеличением отношения N/n .

Оценка верхней анализируемой частоты процесса при вычислении в реальном масштабе времени. Согласно процедуре вычисления, за время прихода n очередных выборок должны быть проделаны все необходимые операции (включая сюда время обращения к памяти), число которых можно принять равным $N[(\log_2 n) + 1]$. Необходимое для этого время, если одна операция производится за τ с, $N[(\log_2 n) + 1]\tau$. Если $\Delta t = \frac{1}{2\omega_B}$ — интервал между двумя выборками сигнала, то предельная верхняя частота сигнала для вычисления в реальном масштабе времени равна

$$f_B = \frac{n}{4\pi N[(\log_2 n) + 1]\tau}. \quad (26)$$

Выводы

Применение предлагаемой процедуры позволяет в ряде случаев существенно сократить число вычислительных операций при нахождении «скользящего» мгновенного спектра случайных процессов. Приведенные формулы (23), (24) позволяют оценить верхнюю и нижнюю границы возникающей при этом погрешности. В случае ее роста с увеличением числа шагов скольжения предложены пути устранения этого явления или его ограничения. Оценка верхней анализируемой частоты процесса при вычислении в реальном масштабе времени может быть произведена по формуле (26).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. D. Welch. The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: a Method Based on Time Averaging over Short, Modified Periodograms.— IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, 1967, v. AU-15, № 2.
2. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
3. P. D. Welch. A Fixed — Point Fast Fourier Transform Error Analysis.— IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, 1969, v. AU-17, № 2.
4. J. W. Cooley and J. W. Tukey. An Algorithm for the Machine calculation of Complex Fourier Series.— Math. of Comput., 1965, v. 19.

Поступила в редакцию 17 февраля 1972 г.