УДК 681.3 : 621.391

М. Ш. РОЗЕНБЛАТ, Б. И. ШВЕЦКИЙ

(Львов)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В связи с широким распространением цифровых методов спектрального анализа, основанных на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ), а также учитывая преимущества специализированных вычислительных устройств (цифровых спектроанализаторов), представляются актуальными исследования путей сокращения числа основных операций ДПФ-умножений.

Введем следующие обозначения: $W_N = |\omega_{r,k}| = \left|e^{j\frac{2\pi}{N}r\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right|$ * — комплексная матрица ДПФ размером N; $A_N = |a_r|$ — вектор-столбец коэффициентов Фурье размером N; $X_N = |x_k|$ — преобразуемый (комплексный) вектор-столбец размером N; $U_N = |c_{r,k}|$ — действительная матрица ДПФ; $c_{r,k} = \cos\frac{2\pi}{N}r\left(k+\frac{1}{2}\right)$, где $r, k = \overline{0, N-1}$; $U_{\frac{N}{2}} = |c_{r,k}|$, где $r, k = \overline{0, \frac{N}{2}-1}$; ${}_pU_{\frac{N}{2}}$ — матрица, в верхней половине которой четные строки $U_{\frac{N}{2}}$, в нижней — нечетные.

$$I = \begin{vmatrix} 100\ldots000 \\ 010\ldots000 \\ 001\ldots000 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ 000\ldots100 \\ 000\ldots010 \\ 000\ldots100 \end{vmatrix}, \qquad \hat{I} = \begin{vmatrix} 000\ldots001 \\ 000\ldots010 \\ 000\ldots100 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ 001\ldots000 \\ 010\ldots000 \\ 100\ldots000 \end{vmatrix}, \qquad E = \begin{vmatrix} 100\ldots\quad 000 \\ 0-10\ldots 000 \\ 001\ldots\quad 000 \\ \ldots\ \ldots\quad \ldots \\ \ldots\ \ldots\quad \ldots \\ 000\ldots-100 \\ 000\ldots\quad 010 \\ 000\ldots 00-1 \end{vmatrix};$$

* По сравнению с принятой формой представления матрицы коэффициентов Фурье

$$W'_N = \left|\omega'_{r,k}\right| = \left|e^{j\frac{2\pi}{N}rk}\right|;$$

здесь

$$W_N = \left|e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{r}{2}}\right| \left|W'_N\right|.$$

Полученные в результате такого Фурье-преобразования коэффициенты должны быть подвержены дополнительному повороту:

$$\dot{A}_r = a_r e^{-j\frac{\pi r}{N}}.$$

Кроме того, для соблюдения ортогональности преобразованию (1) должно соответствовать обратное преобразование

$$X_N = W''_N A_r,$$

где

$$W''_N = \left|e^{-j\frac{2\pi}{N}k\left(r+\frac{1}{2}\right)}\right|,$$

ибо лишь в этом случае

$$W_N W''_N = I. \text{ (Примечание ред.)}.$$

$$J' = \begin{vmatrix} 000 \dots 000 \\ 000 \dots 00j \\ 000 \dots 0j0 \\ \dots \ \dots \ \dots \\ \dots \ \dots \ \dots \\ 000 \dots 000 \\ 00j \dots 000 \\ 0j0 \dots 000 \end{vmatrix}, \qquad I' = \begin{vmatrix} 000 & \dots 000 \\ 000 & \dots 00-1 \\ 000 & \dots 0-10 \\ \dots & \dots \ \dots \\ \dots & \dots \ \dots \\ 000 & 000 \\ 00-1 & \dots 000 \\ 0-10 & \dots 000 \end{vmatrix}, \qquad R = \begin{vmatrix} 100 & ..0\ 000 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{2}0 & ..0\ 000 \\ 0\frac{1}{2}\frac{1}{2} & ..0\ 000 \\ \dots & \dots \ \dots \\ \dots & \dots \ \dots \\ 000 & ..\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}00 \\ 000 & ..0\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}0 \\ 000 & ..0\ 0\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} \end{vmatrix};$$

$$\hat{I}\hat{I} = I; \quad \bar{I} = (-1)\,I; \quad J = \sqrt{-1}\,I = jI; \quad \hat{A} = A\hat{I}; \quad \bar{A} = A\bar{I} = \bar{I}A;$$

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\eta & \text{при } \eta \text{ четном;} \\ \frac{1}{2}(\eta + 1) & \text{при } \eta \text{ нечетном;} \end{cases}$$

${}_{p_1}\hat{U}'_{\frac{N}{4}}$ — матрица, в верхней половине которой находятся строки $U'_{\frac{N}{4}}$, индекс которых обеспечивает четность функции $\varphi(\eta)$, т. е. четные в смысле $\varphi(\eta)$ строки; в нижней — остальные. $r^{(n)}_{\eta,i}$ — номер строки матрицы $U_{\frac{N}{2}}$, которая на i-м шаге алгоритма находится в n-м блоке, где присвоен ей новый порядковый номер η; $D_{\frac{N}{2^{i+2}}\, r^{(n)}_{0,i}}$ — диагональная матрица с элементами $2\cos\frac{\pi r^{(n)}_{0,i}}{2^{i+1}}$.

Представим дискретное преобразование Фурье комплексного вектора $X_N (N = 2^\gamma$; γ — целое положительное число) в матричной форме

$$A_N = W_N X_N. \tag{1}$$

Очевидные тождества $\omega_{r,k} = -\overset{*}{\omega}_{N-r,k}$ $(k = \overline{0, N-1}, \quad r = \overline{1, N-1})$ и $\omega_{r,k} = \overset{*}{\omega}_{r,N-k-1}$ $(r,\, k = \overline{0, N-1})$ позволяют разложить W_N на действительную блочную матрицу с вдвое меньшим числом элементов и на две элементарные матрицы по $2N$ ненулевых элементов каждая

$$W_N = S_0 \begin{vmatrix} U_{\frac{N}{2}} & 0 \\ 0 & U_{\frac{N}{2}} \end{vmatrix} G_0, \tag{2}$$

где

$$S_0 = \begin{vmatrix} I_{\frac{N}{2}} & J'_{\frac{N}{2}} \\ I'_{\frac{N}{2}} & J_{\frac{N}{2}} \end{vmatrix}; \qquad G_0 = \begin{vmatrix} I_{\frac{N}{2}} & \hat{I}_{\frac{N}{2}} \\ \hat{E}_{\frac{N}{2}} & \bar{E}_{\frac{N}{2}} \end{vmatrix}.$$

Поскольку элементы $U_{\frac{N}{2}}$ обладают свойством

$$C_{\eta,k} = \begin{cases} C_{\eta,L-1-k} & \text{при } \eta \text{ четном;} \\ -C_{\eta,L-1-k} & \text{при } \eta \text{ нечетном,} \end{cases} \tag{3}$$

$$2 \quad \left| U_{\frac{N}{4}} \;\; U_{\frac{N}{4}} \right| \quad \left| 0 \;\; U_{\frac{N}{4}} \right| \left| I_{\frac{N}{4}} \;\; I_{\frac{N}{4}} \right| \quad \left| 0 \;\; U_{\frac{N}{4}} \right|$$

Матрица $U_{\frac{N}{4}}$ содержит четные строки и, следовательно, разложима по формуле (4) (N следует заменить на $N/2$). Элементы матрицы $\hat{U}'_{\frac{N}{4}}$ (нечетные строки $U_{\frac{N}{2}}$) не обладают свойством (3). Тем не менее можно указать два алгоритма разложения $\hat{U}'_{\frac{N}{4}}$ на элементарные множители.

Первый алгоритм разложения $\hat{U}'_{\frac{N}{4}}$. Умножим обе части выражения (4) на матрицу $\Psi = \begin{vmatrix} I_{\frac{N}{4}} & 0 \\ 0 & R_{\frac{N}{4}} \end{vmatrix}$. Тогда элементы новой матрицы $R_{\frac{N}{4}} \hat{U}'_{\frac{N}{4}}$

$$\xi_{r,k} = \begin{cases} C_{1,k} & \text{при } r = 1; \\ \frac{1}{2} C_{r-2,k} + \frac{1}{2} C_{r,k} = C_{r-1,k} C_{1,k} & \text{при нечетном } r = \overline{3, \frac{N}{4} - 1} \end{cases}$$

связаны простой зависимостью с соответствующими элементами $U_{\frac{N}{4}}$:

$$R_{\frac{N}{4}} \hat{U}'_{\frac{N}{4}} = U_{\frac{N}{4}} \hat{I}_{\frac{N}{4}} C_{\frac{N}{4}}. \tag{5}$$

В силу (5) выражение (4) приобретает вид

$$_pU_{\frac{N}{2}} = \Psi^{-1} \begin{vmatrix} U_{\frac{N}{4}} & 0 \\ 0 & U_{\frac{N}{4}} \hat{I}_{\frac{N}{4}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_{\frac{N}{4}} & 0 \\ 0 & C_{\frac{N}{4}} \end{vmatrix} G_1 = \Psi^{-1} \begin{vmatrix} U_{\frac{N}{4}} & 0 \\ 0 & U_{\frac{N}{4}} \hat{I}_{\frac{N}{4}} \end{vmatrix} D_1 G_1, \tag{6}$$

где Ψ^{-1} — обратная матрица ($\Psi^{-1}\Psi = I$). Итеративное применение (6) $(\gamma - 1)$ раз дает следующее разложение $U_{\frac{N}{2}}$:

$$U_{\frac{N}{2}} = K_1^{-1} K_2^{-1} \ldots K_{\gamma-2}^{-1} P T_{\gamma-1} T_{\gamma-2} \ldots T_2 T_1, \tag{7}$$

где

$$T_i = D_i G_i; \quad G_i = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}_1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & \hat{A}_1 \end{vmatrix}; \qquad D_i = \begin{vmatrix} A_2 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & A_3 \end{vmatrix};$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} I_{\frac{N}{2^{i+1}}} & \hat{I}_{\frac{N}{2^{i+1}}} \\ \hat{I}_{\frac{N}{2^{i+1}}} & \bar{I}_{\frac{N}{2^{i+1}}} \end{vmatrix}; \quad A_2 = I_{\frac{N}{2^{i+1}}}; \quad A_3 = C_{\frac{N}{2^{i+1}}} =$$

$$= \operatorname{diag} \left| C_{2^{i-1}, \frac{N}{2^{i+1}} - 1 - k} \right|; \quad k = \overline{0, \frac{N}{2^{i+1}} - 1}.$$

Матрица P совпадает с матрицей перестановок в алгоритме Кули и Таки*. Она устанавливает соответствие между r-й строкой матрицы $U_{\frac{N}{2}}$ и ρ_r-й строкой матрицы $T=\prod_{i=1}^{\gamma-1} T_i$; если двоичное представление $r= =r_{\gamma-2}r_{\gamma-3}\ldots r_1 r_0$, то соответствущее ему $\rho_r=r_0 r_1\ldots r_{\gamma-3}r_{\gamma-2}$ (инверсное двоичное представление r).

Согласно (7), для определения матрицы $U_{\frac{N}{2}}$ необходимо выполнить обратное преобразование $K^{-1}=\prod_{i=1}^{\gamma-2} K^{-1}_{\gamma-i-1}$ матрицы PT. Прежде всего заметим, что первое применение формулы (6) к $U_{\frac{N}{2}}$ и последующее упорядочение строк дает матрицу $U_1=K_1U_{\frac{N}{2}}$, r-я нечетная строка которой равна полусумме двух строк $U_{\frac{N}{2}}$ с индексами $r-2$ и $r\,(r>1)$; применение (7) к U_{i-1} и последующее упорядочение строк дает матрицу $U_i= =K_iU_{i-1}$, k-й блок $V_k^{(i)}$ которой размером $L=2^{i-1}$ равен полусумме блоков $V_{k-2}^{(i-1)}$ и $V_k^{(i-1)}$ матрицы U_{i-1} ($k>1$ — нечетное) (итеративное применение (6) к $U_{\frac{N}{2}}$ $\gamma-1$ раз дает PT). Отсюда следует, что обратное преобразование матрицы U_i, т. е. $U_{i-1}=K_i^{-1}U^i$, определяется при помощи следующей формулы:

$$V_k^{(i-1)}=2V_k^{(i)}-V_{k-2}^{(i-1)}\quad (k>1\ \text{нечетное}). \tag{8}$$

Таким образом, итеративное применение формулы (8) к матрице PT $(\gamma-2)$ раза дает матрицу $U_{\frac{N}{2}}$; при этом размер преобразуемого блока на i-м шаге равен 2^{i-1} $(i=\gamma-2,\ \gamma-1,\ \ldots,\ 1)$. Алгоритм вычисления преобразования K^{-1} матрицы K поясняется рис. 1, где приведены матрицы $K_2K_1=K_3^{-1}K$, $K_1=K_2^{-1}K_3^{-1}K$ для $\gamma=4$.

Второй алгоритм разложения $\hat{U}'_{\frac{N}{4}}$. Представим матрицу $\hat{U}'_{\frac{N}{4}}$ в виде

$$\hat{U}'_{\frac{N}{4}}=Q_{\frac{N}{4}}\begin{vmatrix} I_{\frac{N}{8}} & 0\\ \hat{\bar{I}}_{\frac{N}{8}} & I_{\frac{N}{8}}\end{vmatrix}. \tag{9}$$

Элементы новой матрицы $Q_{\frac{N}{4}}$

$$\xi_{\eta,k}=\begin{cases} C_{1+2\eta,k}+C_{1+2\eta,\frac{N}{4}-1-k}=2\cos\dfrac{(1+2\eta)\pi}{4}C_{1+2\eta,\frac{N}{8}-\frac{1}{2}-k}, & k=\overline{0,\ \frac{N}{8}-1};\\ C_{1+2\eta,\frac{N}{4}-1-k}, & k=\overline{\frac{N}{8},\ \frac{N}{4}-1}\end{cases}$$

обладают свойством

$$(-1)^{\varphi(\eta)}2\cos\frac{\pi}{4}\xi_{\eta,k}=\xi_{\eta,k+\frac{N}{8}},\quad k=\overline{0,\ \frac{N}{8}-1}. \tag{10}$$

В силу (9) и (10) матрица ${}_{p_1}\hat{U}'_{\frac{N}{4}}$ приобретает вид

$$p_1\hat{U}'_{\frac{N}{4}}=\begin{vmatrix} V_2^{(2)} & V_2^{(2)}\\ \bar{V}_3^{(2)} & V_3^{(2)}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} D_{\frac{N}{8},1} & 0\\ 0 & I_{\frac{N}{8}}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_{\frac{N}{8}} & 0\\ \hat{\bar{I}}_{\frac{N}{8}} & I_{\frac{N}{8}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} V_2^{(2)} & 0\\ 0 & V_3^{(2)}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_{\frac{N}{8}} & I_{\frac{N}{8}}\\ \bar{I}_{\frac{N}{8}} & I_{\frac{N}{8}}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} D_{\frac{N}{8},1} & 0\\ 0 & I_{\frac{N}{8}}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_{\frac{N}{8}} & 0\\ \hat{\bar{I}}_{\frac{N}{8}} & I_{\frac{N}{8}}\end{vmatrix}. \tag{11}$$

---

* C. Richard Singleton. On Computing the Fast Fourier Transform.— Communs ACM, 1967, 10, № 10.

$$K=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8}
\end{vmatrix}$$

$$K_3^{-1}K=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}
\end{vmatrix}$$

$$K_1=K_2^{-1}K_3^{-1}K=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{vmatrix}$$

Рис. 1.

Матрицы $V_2^{(2)}$ и $V_3^{(2)}$ — это соответственно четный и нечетный в смысле $\varphi(\eta)$ блоки $U'_{\frac{N}{4}}$, следовательно, к ним применима формула (11) (N заменяется на $N/2$). При этом в разложении $V_2^{(2)}$ участвует диагональная матрица $D_{\frac{N}{16},1}$, а в разложении $V_3^{(2)}$ — $D_{\frac{N}{16},3}$. В дальнейшем показано, что элементы диагональных матриц в формуле (11) зависят только от размера раскладываемого блока $V_n^{(i)}$ и индекса $r_{0,i}^{(n)}$.

Итеративное применение формул (4) и (11) $(\gamma-1)$ раз дает следующее разложение:

$$U_{\frac{N}{2}} = P_1 F_{\gamma-1} F_{\gamma-2} \dots F_2 F_1, \tag{12}$$

где $F_i = \Theta_i \; H_i \; M_i$;

$$M_i = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_2 \end{vmatrix}; \quad H_i = \begin{vmatrix} A_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_4 \end{vmatrix};$$

$$Q_{i\neq\gamma-1} = \begin{vmatrix} A_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{2^i-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_{2^i-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & B_{2^i-1} \end{vmatrix};$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} I_{\frac{N}{2^{i+1}}} & \hat{I}_{\frac{N}{2^{i+1}}} \\ \hat{I}_{\frac{N}{2^{i+1}}} & \bar{I}_{\frac{N}{2^{i+1}}} \end{vmatrix}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} I_{\frac{N}{2^{i+1}}} & I_{\frac{N}{2^{i+1}}} \\ \bar{I}_{\frac{N}{2^{i+1}}} & I_{\frac{N}{2^{i+1}}} \end{vmatrix}; \quad A_3 = I_{\frac{N}{2^{i+1}}};$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} I_{\frac{N}{2^{i+2}}} & 0 \\ \bar{I}_{\frac{N}{2^{i+2}}} & I_{\frac{N}{2^{i+2}}} \end{vmatrix}; \quad B_{n\neq 0} = \begin{vmatrix} D_{\frac{N}{2^{i+2}}} r_{0,i}^{(n)} & 0 \\ 0 & I_{\frac{N}{2^{i+1}}} \end{vmatrix}.$$

Перегруппировки строк $U_{\frac{N}{2}}$, необходимые при выводе формулы (12), отличаются от перестановок в первом алгоритме; матрица P_1 не совпадает с матрицей P и устанавливает иное соответствие между r-й строкой $U_{\frac{N}{2}}$ и S_r-й строкой $F = \prod_{i=1}^{\gamma-1} F_i$.

Определим алгоритм вычисления двоичного представления S_r по двоичному представлению r. Для этого найдем, из каких строк матрицы $U_{\frac{N}{2}}$ образуется произвольный блок $V_n^{(i)}$. Докажем, что

$$r_{\eta,i}^{(n)} = \begin{cases} \varphi(\eta)\, 2^{i+1} + (-1)^{\eta}\, r_{0,i}^{(n)} & \text{при } n > 0; \\ \eta 2^i & \text{при } n = 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $r_{0,i+1}^{(1)} = r_{1,i}^{(0)} = 2^i$; $\eta = \overline{0, \frac{N}{2^{i+1}} - 1}$; $n = \overline{0, 2^i - 1}$; $i = \overline{0, \gamma - 1}$.

При $i=0,1$, очевидно, формула (13) справедлива. Пусть она справедлива на i-м шаге алгоритма, тогда на $(i+1)$-м шаге распределение строк $U_{\frac{N}{2}}$ по блокам должно получаться из (13) формальной заменой i на $i+1$.

На $(i+1)$-м шаге алгоритма применение (4) дает блоки $V_0^{(i+1)}$ и $V_1^{(i+1)}$ соответственно из четных $(2\eta_1)$ и нечетных $(2\eta_1+1)$ строк $V_0^{(i)}$. Следовательно,

$$r_{\eta_1,i+1}^{(0)} = 2\eta_1 2^i = \eta_1 2^{i+1}; \quad r_{\eta_1,i+1}^{(1)} = (2\eta_1 + 1)\, 2^i = \varphi(\eta_1)\, 2^{i+1} + \\ + (-1)^{\eta_1} 2^i = \varphi(\eta_1)\, 2^{i+1} + (-1)^{\eta_1} r_{0,i+1}^{(1)},$$

где $r_{0,i+1}^{(1)} = r_{1,i}^{(0)} = 2^i$ и $\eta_1 = \overline{0, \frac{N}{2^{i+2}} - 1}$.

В результате применения (11) образуются блоки $V_{2n}^{(i+1)}$ и $V_{2n+1}^{(i+1)}$ соответственно из четных и нечетных в смысле $\varphi(\eta)$ строк $V_n^{(i)}$. Пользуясь формулой (13), получаем:

$$r_{\eta_1,i+1}^{(2n)} = 2\varphi(\eta_1)\, 2^{i+1} + (-1)^{\eta_1} r_{0,i}^{(n)} = \varphi(\eta_1)\, 2^{i+2} + \\ + (-1)^{\eta_1} r_{0,i+1}^{(2n)}; \quad r_{\eta_1,i+1}^{(2n+1)} = [2\varphi(\eta_1) + (-1)^{\eta_1}]\, 2^{i+1} + (-1)^{\eta_1+1} r_{0,i}^{(n)} = \\ = \varphi(\eta_1)\, 2^{i+2} + (-1)^{\eta_1} r_{0,i+1}^{(2n+1)},$$

где

$$r_{0,i}^{(n)} = r_{0,i+1}^{(2n)}; \quad r_{0,i+1}^{(2n+1)} = 2^{i+1} - r_{0,i}^{(n)}; \quad \eta_1 = \overline{0, \frac{N}{2^{i+2}} - 1}.$$

Формула (13) доказана. Из (13) видно, что, во-первых, элементы диагональных матриц $D_{\frac{N}{2^{i+2}} r_{0,i}^{(n)}}$ зависят только от произведения $\frac{N}{2^{i+2}} r_{0,i}^{(n)}$, во-вторых, между любым r и S_r существует следующая связь:

$$S_r = S_{r_1} + \frac{N}{2^{\alpha+1}}, \quad \text{если } r + r_1 = 2^{\alpha}, \; r > r_1 \neq 0;$$
$$S_r = \frac{N}{2^{\alpha+2}}, \quad \text{если } r = 2^{\alpha}. \tag{14}$$

Действительно, из формулы (13) при $\alpha=i+1$ находим, что равенство $r+r_1=2^{\alpha}(r>r_1\neq 0)$ возможно только тогда, когда одновременно $r = r_{0,i}^{(2n+1)}$ и $r_1 = r_{0,i}^{(2n)}$. Значит, расстояние между строками r и r_1 в матрице F равно $S_r - S_{r_1} = \frac{N}{2^{i+2}}$. Если $r_1=0$, то на $(i+2)$-м шаге алгоритма строка с индексом $r = 2^{i+1} = r_{0,i+2}^{(1)}$, очевидно, расположится на расстоянии $\frac{N}{2^{i+3}}$ от нулевой $(r_1=0)$ строки F. Формула (14) доказана.

Благодаря (14) вычисление двоичного представления $S_r = S_1 S_2 \ldots \ldots S_{\gamma-2} S_{\gamma-1}$ сводится к следующей процедуре: по знаку разности $2^{\gamma-2} - r = r_1$ находим $S_{\gamma-1}$. Если $r_1 \leqslant 0$, то $S_{\gamma-1} = 1$ и для определения $S_{\gamma-2}$ берем разность $2^{\gamma-2} - 2|r_1| = r_2$ ($|r_1|$ — модуль r_1). Если $r_1 > 0$, то $S_{\gamma-1} = 0$ и для определения $S_{\gamma-2}$ берем разность $2^{\gamma-2} - 2r = r_2$ и т. д. Максимальное количество шагов равно $\gamma - 1$.

Участвующие в разложениях диагональные матрицы «следуют» в порядке S_r.

Диагональная матрица $K_{\gamma-1}$ образуется иначе, чем остальные, и содержит расположенные в порядке S_r элементы нулевого столбца матрицы $U_{\frac{N}{2}}$.

Реализация преобразований T_i и F_i значительно упрощается при наличии таблицы $C_\alpha = \cos \frac{2\pi}{N} \alpha$. Для реализации первого алгоритма значения C_α следует располагать в таблице по порядку α, для второго алгоритма порядок расположения C_α определяется по S_α.

В заключение определим общее количество операций при реализации предлагаемых алгоритмов. Под сложением (умножением) будем понимать сумму или разность (произведение) двух действительных чисел.

Преобразование T_i в первом алгоритме потребует выполнения $2N$ сложений, преобразование K^{-1}—$N(\log_2 N - 2)$ сложений, S_0—$2N$ сложений. Преобразование P, сравнительно сложное для универсальных ЭВМ, просто реализуется в специализированных процессорах, практически не требуя увеличения машинного времени.

Таким образом, при реализации в специализированном процессоре первого алгоритма общее количество сложений равно $3N \log_2 N$, а умножений — $N \log_2 N$. Точно такое же количество операций потребуется и во втором алгоритме.

Для сравнения отметим, что алгоритм Кули — Таки требует $3N \log_2 N$ сложений и $2N \log_2 N$ умножений.

Примеры. На рис. 2 представлен пример вычислений по первому алгоритму для $N = 16$. Матрица W_N разбивается в данном случае на матрицы G_0, T_1, T_2, T_3, P, K_2^{-1}, K_1^{-1} и S_0. Как видно из рис. 2, преобразование G_0 распадается на ряд линейных комбинаций пар элементов, расположенных симметрично относительно середины вектора X. В результате образуются два независимых вектора $Y = |Y_k|$, $k = \overline{0,7}$ и $Y_1 = |Y_k|$, $k = \overline{8,15}$. Преобразования T_1, T_2, T_3, P, K_2^{-1}, K_1^{-1} этих векторов совпадают, поэтому в дальнейшем они описываются только для вектора Y. Вектор $T_1 Y = \begin{vmatrix} Y_0^{(1)} \\ Y_1^{(1)} \end{vmatrix}$ образуется из линейных комбинаций пар элементов, расположенных симметрично относительно середины Y.

Преобразование T_2 распадается аналогично на линейные комбинации пар элементов, расположенных симметрично относительно середины $Y_0^{(1)}$ и $Y_1^{(1)}$. Наконец, T_3 — это линейные комбинации соседних элементов результата преобразования T_2.

Закон образования множителей, участвующих в линейных комбинациях, не требует дополнительных пояснений.

Перестановка P результатов преобразования T_3 производится по правилу: индекс r сравнивается с инверсным представлением ρ_r; результаты переставляются, если $\rho_r > r$.

Преобразование K_2^{-1} осуществляется путем вычитания из третьего блока ($2e_6$, $2e_7$) первого блока (e_2, e_3). Преобразование K_1^{-1} производится по алгоритму: из третьего блока ($2e_3$) вычитается первый блок (e_1), из пятого блока ($2e_5$) результат предыдущего действия (f_3) и т. д.

	G_0	T_1	T_2	T_3	P	K_2^{-1}	K_1^{1-}	S_0
x_0	$x_0+x_{15}=y_0$	y_0+y_7	$(y_0+y_7)+(y_3+y_4)$	$=z_0 \quad z_0+z_1=e_0$	e_0		$=f_0$	$f_0=a_0$
x_1	$x_1+x_{14}=y_1$	y_1+y_6	$(y_1+y_6)+(y_2+y_5)$	$=z_1 \quad (z_0-z_1)c_2=e_4$	e_1		$=f_1$	$f_1+jf_{15}=a_1$
x_2	$x_2+x_{13}=y_2$	y_2+y_5	$[(y_1+y_6)-(y_2+y_5)]c_3$	$=z_2 \quad z_3+z_2=e_2$	e_2		$=f_2$	$f_2+jf_{14}=a_2$
x_3	$x_3+x_{12}=y_3$	y_3+y_4	$[(y_0+y_7)-(y_3+y_4)]c_1$	$=z_3 \quad (z_3-z_2)c_2=e_6$	e_3		$2e_3-e_1=f_3$	$f_3+jf_{13}=a_3$
x_4	$x_4+x_{11}=x_4$	$(y_3-y_4)c_{3,5}$	$(y_0-y_7)c_{0,5}+(y_3-y_4)c_{3,5}$	$=z_4 \quad z_4+z_5=e_1$	e_4		$=f_4$	$f_4+jf_{12}=a_4$
x_5	$x_5+x_{10}=y_5$	$(y_2-y_5)c_{2,5}$	$(y_1-y_6)c_{1,5}+(y_2-y_5)c_{2,5}$	$=z_5 \quad (z_4-z_5)c_2=e_5$	e_5		$2e_5-f_3=f_5$	$f_5+jf_{11}=a_5$
x_6	$x_6+x_9=y_6$	$(y_1-y_6)c_{1,5}$	$[(y_1-y_6)c_{1,5}-(y_2-y_5)c_{2,5}]c_3$	$=z_6 \quad z_7+z_6=e_3$	e_6	$2e_6-e_2=e_6^1$	$=f_6$	$f_6+jf_{10}=a_6$
x_7	$x_7+x_8=y_7$	$(y_0-y_7)c_{0,5}$	$[(y_0-y_7)c_{0,5}-(y_3-y_4)c_{3,5}]c_1$	$=z_7 \quad (z_7-z_6)c_2=e_7$	e_7	$2e_7-e_3=e_7^1$	$2e_7^1-f_5=f_7$	$f_7+jf_9=a_7$
x_8	$x_7-x_8=y_8$	y_8+y_{15}	$(y_8+y_{15})+(y_{11}+y_{12})$	$=z_8 \quad z_8+z_9=e_8$	e_8		$=f_8$	$jf_8=a_8$
x_9	$x_9-x_6=y_9$	y_9+y_{14}	$(y_9+y_{14})+(y_{10}+y_{13})$	$=z_9 \quad (z_8-z_9)c_2=e_{12}$	e_9		$=f_9$	$-f_7+jf_9=a_9$
x_{10}	$x_5-x_{10}=y_{10}$	$y_{10}+y_{13}$	$[(y_9+y_{14})-(y_{10}+y_{13})]c_3$	$=z_{10} \quad z_{11}+z_{10}=e_{10}$	e_{10}		$=f_{10}$	$-f_6+jf_{10}=a_{10}$
x_{11}	$x_{11}-x_4=y_{11}$	$y_{11}+y_{12}$	$[(y_8+y_{15})-(y_{11}+y_{12})]c_1$	$=z_{11} \quad (z_{11}-z_{10})c_2=e_{14}$	e_{11}		$2e_{11}-e_9=f_{11}$	$-f_5+jf_{11}=a_{11}$
x_{12}	$x_3-x_{12}=y_{12}$	$(y_{11}-y_{12})c_{3,5}$	$(y_8-y_{15})c_{0,5}+(y_{11}-y_{12})c_{3,5}$	$=z_{12} \quad z_{12}+z_{13}=e_9$	e_{12}		$=f_{12}$	$-f_4+jf_{12}=a_{12}$
x_{13}	$x_{13}-x_2=y_{13}$	$(y_{10}-y_{13})c_{2,5}$	$(y_9-y_{14})c_{1,5}+(y_{10}-y_{13})c_{2,5}$	$=z_{13} \quad (z_{12}-z_{13})c_2=e_{13}$	e_{13}		$2e_{13}-f_{11}=f_{13}$	$-f_3+jf_{13}=a_{13}$
x_{14}	$x_1-x_{14}=y_{14}$	$(y_9-y_{14})c_{1,5}$	$[(y_9-y_{14})c_{1,5}-(y_{10}-y_{13})c_{2,5}]c_3$	$=z_{14} \quad z_{15}+z_{14}=e_{11}$	e_{14}	$2e_{14}-e_{10}=e_{14}^1$	$=f_{14}$	$-f_2+jf_{14}=a_{14}$
x_{15}	$x_{15}-x_0=y_{15}$	$(y_8-y_{15})c_{0,5}$	$[(y_8-y_{15})c_{0,5}-(y_{11}-y_{12})c_{3,5}]c_1$	$=z_{15} \quad (z_{15}-z_{14})c_2=e_{15}$	e_{15}	$2e_{15}-e_{11}=e_{15}^1$	$2e_{15}^1-f_{13}=f_{15}$	$-f_1+jf_{15}=a_{15}$

Рис. 2.

	G	F_1	F_2	F_3	S'_0
x_0	$x_0+x_{15}=y_0$	y_0+y_7	$(y_0+y_7)+(y_3+y_4)$	$=z_0 \quad z_0+z_1$	$=f_0 \quad f_0=a_0$
x_1	$x_1+x_{14}=y_1$	y_1+y_6	$(y_1+y_6)+(y_2+y_5)$	$=z_1 \quad (z_0-z_1)c_2$	$=f_4 \quad f_4 \quad jf_{12}=a_4$
x_2	$x_2+x_{13}=y_2$	y_2+y_5	$[(y_1+y_6)-(y_2+y_5)]2c_2$	$=z_2 \quad (z_3+z_2)c_1$	$=f_2 \quad f_2+jf_{14}=a_2$
x_3	$x_3+x_{12}=y_3$	y_3+y_4	$[(y_0+y_7)-(y_3+y_4)]-[(y_1+y_6)-(y_2+y_5)]$	$=z_3 \quad (z_3-z_2)c_3$	$=f_6 \quad f_6+jf_{10}=a_6$
x_4	$x_4+x_{11}=y_4$	$(y_3-y_4)2c_2$	$[(y_1-y_6)-(y_2-y_5)+(y_3-y_4)2c_2]2c_1$	$=z_4 \quad (z_5+z_4)c_{0,5}$	$=f_1 \quad f_1+jf_{15}=a_1$
x_5	$x_5+x_{10}=y_5$	$(y_2-y_5)2c_2$	$[(y_0-y_7)-(y_3-y_4)+(y_2-y_5)2c_2]-[(y_1-y_6)-(y_2-y_5)+(y_3-y_4)2c_2]$	$=z_5 \quad (z_5-z_4)c_{3,5}$	$=f_7 \quad f_7+jf_9=a_7$
x_6	$x_6+x_9=y_6$	$(y_1-y_6)-(y_2-y_5)$	$[(y_1-y_6)-(y_2-y_5)-(y_3-y_4)2c_2]2c_3$	$=z_6 \quad (z_7+z_6)c_{1,5}$	$=f_3 \quad f_3+jf_{13}=a_3$
x_7	$x_7+x_8=y_7$	$(y_0-y_7)-(y_3-y_4)$	$[(y_0-y_7)-(y_3-y_4)-(y_2-y_5)2c_2]-[(y_1-y_6)-(y_2-y_5)-(y_3-y_4)2c_2]$	$=z_7 \quad (z_7-z_6)c_{2,5}$	$=f_5 \quad f_5+jf_{11}=a_5$
x_8	$x_7-x_8=y_8$	y_8+y_{15}	$(y_8+y_{15})+(y_{11}+y_{12})$	$=z_8 \quad z_8+z_9$	$=f_8 \quad jf_8=a_8$
x_9	$x_9-x_6=y_9$	y_9+y_{14}	$(y_9+y_{14})+(y_{10}+y_{13})$	$=z_9 \quad (z_8-z_9)c_2$	$=f_{12} \quad -f_4+jf_{12}=a_{12}$
x_{10}	$x_5-x_{10}=y_{10}$	$y_{10}+y_{13}$	$[(y_9+y_{14})-(y_{10}+y_{13})]2c_2$	$=z_{10} \quad (z_{11}+z_{10})c_1$	$=f_{10} \quad -f_6+jf_{10}=a_{10}$
x_{11}	$x_{11}-x_4=y_{11}$	$y_{11}+y_{12}$	$[(y_8+y_{15})-(y_{11}+y_{12})]-[(y_9+y_{14})-(y_{10}+y_{13})]$	$=z_{11} \quad (z_{11}-z_{10})c_3$	$=f_{14} \quad -f_2+jf_{14}=a_{14}$
x_{12}	$x_3-x_{12}=y_{12}$	$(y_{11}-y_{12})2c_2$	$[(y_9-y_{14})-(y_{10}-y_{13})+(y_{11}-y_{12})2c_2]2c_1$	$=z_{12} \quad (z_{13}+z_{12})c_{0,5}$	$=f_9 \quad -f_7+jf_9=a_9$
x_{13}	$x_{13}-x_2=y_{13}$	$(y_{10}-y_{13})2c_2$	$[(y_8-y_{15})-(y_{11}-y_{12})+(y_{10}-y_{13})2c_2]-[(y_9-y_{14})-(y_{10}-y_{13})+(y_{11}-y_{12})2c_2]$	$=z_{13} \quad (z_{13}-z_{12})c_{3,5}$	$=f_{15} \quad -f_1+jf_{15}=a_{15}$
x_{14}	$x_1-x_{14}=y_{14}$	$(y_9-y_{14})-(y_{10}-y_{13})$	$[(y_9-y_{14})-(y_{10}-y_{13})-(y_{11}-y_{12})2c_2]2c_3$	$=z_{14} \quad (z_{15}+z_{14})c_{1,5}$	$=f_{11} \quad -f_5+jf_{11}=a_{11}$
x_{15}	$x_{15}-x_0=y_{15}$	$(y_8-y_{15})-(y_{11}-y_{12})$	$[(y_8-y_{15})-(y_{11}-y_{12})-(y_{10}-y_{13})2c_2]-[(y_9-y_{14})-(y_{10}-y_{13})-(y_{11}-y_{12})2c_2]$	$=z_{15} \quad (z_{15}-z_{14})c_{2,5}$	$=f_{13} \quad -f_3+jf_{13}=a_{13}$

Рис. 3.

Преобразование S_0 распадается на линейные комбинации пар элементов вектора f, порядковые номера которых r и r_1 удовлетворяют условию $r+r_1=16$ $(r>r_1)$, где $r \neq 0$, $r_1 \neq 8$.

На рис. 3 представлен пример вычислений по второму алгоритму при $N=16$. Преобразования G_0 и S_0 совпадают в обоих алгоритмах.

Преобразование F_1 разбивается на преобразования M_1, H_1 и Θ_1. Преобразование M_1 распадается на суммы и разности элементов, расположенных симметрично относительно середины Y, в результате чего образуются два блока Y_0 и Y_1. Вектор H_1Y_1 получается из пар элементов, расположенных симметрично относительно середины Y_1, а вектор K_1Y_1 — это результат умножения верхней половины Y_1 на множитель $2C_2$.

Аналогично производится преобразование F_2 над результатами F_1, а F_3 распадается на линейные комбинации соседних элементов результата преобразования F_2.

Участвующие в линейных комбинациях множители следуют в порядке S_r. В преобразовании F_3 множители берутся с весом $1/2$.

Если элементы вектора f упорядочены, то к нему применимо преобразование S_0. Во втором алгоритме можно просто выполнить преобразование S_0' над неупорядоченным вектором f. Как видно из рис. 3, вектор $S_0'f$ образуется из суперпозиций элементов f_r и $f_{r'}$, причем

$$r' = \frac{N}{2} + r + (-1)^r \quad \text{при} \quad r = \overline{2, \frac{N}{2} - 1} \text{ и } r' = \frac{N}{2} + 1 \quad \text{при } r = 1.$$

В общем случае для упорядочения коэффициентов Фурье (преобразование P_1) используется следующее соответствие: r-му коэффициенту Фурье соответствует адрес $S_m = S_{S_{m-1}}$ $(S_0 = r;\ m = 1, 2, 3, \ldots)$, удовлетворяющий неравенству $S_m \geqslant r$, где m — минимально возможное. При наличии дополнительной памяти либо в процессе выдачи результатов r-му коэффициенту Фурье соответствует адрес S_r основной памяти.

Поступила в редакцию 4 января 1973 г.

УДК 681.3.02

Н. Н. ВЬЮХИНА

(Новосибирск)

ИНДЕКСНОЕ УСТРОЙСТВО ПРОЦЕССОРА ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В системах обработки экспериментальных данных, работающих по алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ) [1], скорость выполнения БПФ является наиболее существенным фактором. Особенно важна она в системах, предназначенных для работы в реальном темпе времени.

Универсальные ЭВМ не позволяют достичь быстродействия, необходимого для обработки результатов в темпе эксперимента. Однако замена программного пути реализации алгоритма БПФ аппаратурным путем, при котором управление операциями осуществляется с помощью простого индексного устройства (ИУ), формирующего адреса операндов