УДК 621.317.080

М. В. САВЕНКОВ

(Москва)

О КРЕПОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ТЕСТОВ, ОСНОВАННЫХ НА χ^2-РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Во многих прикладных задачах для проверки выдвигаемых гипотез по исходным данным ограниченного объема используются статистики, основанные на χ^2-распределении. Тесты такого типа применяются, в частности, при оценке структуры случайных последовательностей по полученным экспериментально их реализациям [1] и при анализе наборов цифровых показателей методами многомерной математической статистики [2]. При этом считается, что распределение наблюдаемых случайных величин, относительно которых проверяются выдвигаемые гипотезы, является гауссовским.

Практически предположение о гауссовости не является обременительным, так как оно обычно подтверждается или на основе веских интуитивных соображений, или при статистической проверке. Тем не менее оценка ошибки, которую вносит это начальное предположение, представляет немалый интерес, так как с сомнениями относительно устойчивости к изменениям вида распределения исходных данных (крепости) теста типа χ^2 часто бывают связаны возражения по его применению во многих конкретных приложениях.

Как известно, тесты на основе χ^2 являются не очень мощными. Иными словами, чтобы вероятность α_2 отвергнуть проверяемую гипотезу, если она неверна, была значительна, необходимо, чтобы построенная для проверки данной гипотезы статистика u была заметно меньше (на $\delta\chi$) границы χ^2 (α, ν).

Граница $\chi^2(\alpha, \nu)$ выбирается из условия малости вероятности $\alpha_1 = \alpha$ отвергнуть проверяемую гипотезу, если она верна. По приводимым в [3] таблицам нецентрального распределения χ^2 можно оценить мощность теста, построенного на основании статистики u, и указать такие отклонения $\delta\chi$ от граничного значения $\chi^2(\alpha, \nu)$, которые обеспечат вероятность отвергнуть неверную гипотезу не ниже α_2(табл. 1). Как видно из табл. 1, удовлетворительную уверенность при принятии проверяемой гипотезы ($\alpha_2 = 30 \div 40\%$) удается получить, если контрольная

Таблица 1

Отклонения $\delta\chi$ от критического значения $\chi^2(\alpha, \nu)$, которые обеспечивают вероятность отвергнуть неверную гипотезу не ниже α_2

$\alpha_1=\alpha$	ν \ α_2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
5%	3	22	38	47	60	72	92	—	—
	8	21	32	43	54	66	80	97	—
	15	20	30	39	45	55	66	79	—
	35	13	20	25	31	37	47	52	63
	∞	8	12	15	19	22	25	30	35
1%	3	35	46	58	70	83	—	—	—
	8	32	45	55	65	75	88	—	—
	15	31	40	48	56	65	75	88	—
	35	23	29	35	40	46	52	60	71
	∞	17	23	26	30	33	38	43	50

Таблица 2

Отклонения $\delta\chi$ от критического значения $\chi^2(\alpha, \nu)$ суммы квадратов случайных чисел с негауссовским распределением

Вид распределения	Асимметрия	Эксцесс r_4-3	ν \ α	5%	10%	20%	30%
Экспоненциальное . .	2	6	3	—8	—8	—5,5	0
			30	—9,5	—14	—11	—8
Логарифмическое нормальное . .	4	38	3	—16	—3	0	10
			30	—20	—16	—9	—3

статистика u на 30—40% меньше, чем граничное значение $\chi^2(\alpha, \nu)$ при $\alpha=5\%$.

Если несправедливость начального предположения о нормальности наблюдаемых случайных чисел приведет к изменению статистики u менее чем на $\delta\chi=30\div40\%$, то можно полагать тест на основе u крепким, так как на окончательном решении о принятии проверяемой гипотезы негауссовость x не скажется. Проверка крепости теста χ^2 путем прямого численного эксперимента на цифровых вычислительных машинах позволяет считать, что статистика u слабо меняется при изменениях начального распределения. На основании данных, приводимых в статье [4], можно построить табл. 2, характеризующую крепость статистик типа χ^2. Из приводимых в табл. 2 данных следует, что даже для таких распределений, как экспоненциальное и логарифмически нормальное, тест типа χ^2 применять можно, хотя эксцесс и асимметрия этих распределений весьма значительны.

Некоторое представление о деформации распределения статистики типа χ^2 при применении ее к негауссовским распределениям помогает получить проводимое в дальнейшем аналитическое исследование.

Случайная величина u, распределенная по χ^2 с ν степенями свободы, получается при суммировании квадратов ν независимых случайных чисел с гауссовским распределением $f(x)$, нулевым математическим ожиданием $M_1x=0$ и единичной дисперсией $M_2x=\sigma^2=1$. Если производить суммирование квадратов ν центрированных и нормированных ($M_1=0$, $M_2=1$) случайных чисел с произвольным распределением типа A

$$p(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m f(x)\,H^{(m)}(x), \qquad (1)$$

то получим число $u=\sum_{j=1}^{\nu} x_j^2$ с некоторым распределением $p(u)$. Отличие $p(u)$ от χ^2-распределения $p[\chi^2(u, \nu)]$ будет определяться моментами высших порядков M_3, M_4, . . . исходного распределения $p(x)$. В представлении (1) принято:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$H^{(1)}(x)=x;$$

$$H^{(2)}(x)=-1+x^2;$$

$$H^{(3)}(x)=-3x+x^3;$$

$$H^{(4)}(x)=3-6x^2+x^4;$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_m=c_m(M_1, M_2, M_3, \ldots, M_m);$$

$$c_4=\frac{1}{4!}(M_4-6M_2+3)=\frac{r_4-3}{24}.$$

Характеристическую функцию $\gamma_j(t)$ плотности распределения $p(y = x^2)$ квадратов случайных величин с распределением (1) легко подсчитать:

$$\gamma_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \int e^{-\frac{x^2}{2}(1-2it)} H^{(m)}(x)\, dx. \qquad (2)$$

Отсюда получается характеристическая функция распределения суммы квадратов случайных чисел $u = \sum_{j=1}^{\nu} x_j^2$;

$$\gamma(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \int e^{-\frac{x^2}{2}(1-2it)} H^{(m)}(x)\, dx\right]^{\nu}. \qquad (3)$$

Интеграл в выражении (2) равен нулю для всех нечетных функций $H^{(m)}(x)$. Уже одно это позволяет сделать вывод, что нечетные моменты распределения $p(x)$, и в частности косость M_3/σ^3, никакого влияния на распределение статистики u не оказывают. Таким образом, с учетом пяти первых моментов распределения $p(x)$ получаем приближенное выражение для характеристической функции плотности распределения $p(u)$ суммы квадратов случайных величин с негауссовским распределением:

$$\gamma(t) \approx \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1-2it)} dx + \frac{r_4-3}{24} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1-2it)} \times\right.$$

$$\left. \times (3 - 6x^2 + x^4)\, dx\right]^{\nu} = \left\{\frac{1}{\sqrt{1-2it}}\left(1 + \frac{r_4-3}{8}\left[1 - \frac{1}{1-2it}\right]^2\right)\right\}^{\nu}. \qquad (4)$$

Представив (4) как многочлен по степеням $(1-2it)^{-1/2}$ и переходя от характеристической функции к плотности распределения $p(u)$ с учетом

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-2it}}\right)^k \to p[\chi^2(u, k)] = p[\chi^2(u, \nu)] \prod_{j=1}^{1/2(k-\nu)} \frac{u}{\nu+2j}, \qquad (5)$$

получим

$$p(u) = p[\chi^2(u, \nu)] \sum_{l=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{2l} C_l^{\nu} C_k^{2l} \left(\frac{r_4-3}{8}\right)^l \prod_{j=1}^{k} \frac{-u}{\nu+2j}. \qquad (6)$$

В окончательном выражении (6) второй сомножитель характеризует влияние эксцесса (r_4-3) исходного распределения на вид плотности распределения статистики u. На рис. 1 приводится характер течения этой поправки в зависимости от числа степеней свободы ν и величины эксцесса.

Практический интерес представляет вид плотности распределения статистики u для тех значений u, при которых $p(u)$ заметно отличается от нуля. Первый сомножитель в (6) отличен от нуля при

$$M_1\chi^2 - 1{,}6\sqrt{M_2\chi^2} < u < M_1\chi^2 + 1{,}6\sqrt{M_2\chi^2}.$$

Именно для таких u на рис. 1 дается значение отношения распределения $p(u)$ к $p[\chi^2(u, \nu)]$. По оси абсцисс откладывается значение аргумента u в относительных единицах: $\tilde{u} = \frac{u - M_1\chi^2}{\sqrt{M_2\chi^2}}$.

На рис. 2 проиллюстрирована деформация распределения суммы квадратов независимых случайных величин относительно $p[\chi^2(u, \nu)]$. Штриховой линией дается вид $p(u)$ для случайных величин x с плосковершинным распределением $(r_4-3<0)$, а штрихпунктирной — вид

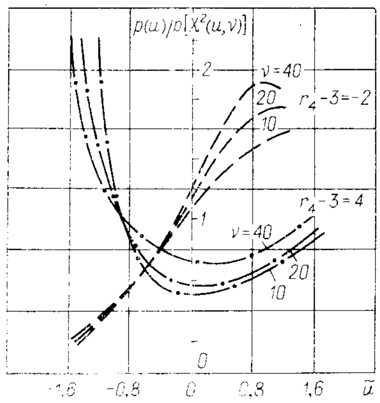

Рис. 1. Величина деформации плотности распределения суммы квадратов независимых случайных величин относительно $p[\chi^2(u, \nu)]$.

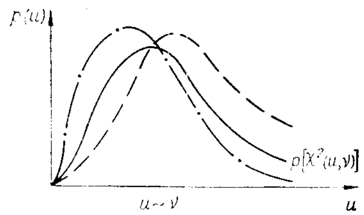

Рис. 2. Вид деформации плотности распределения $u = \sum_{j=1}^{\nu} x_j^2$ относительно $p[\chi^2(u, \nu)]$.

$p(u)$ в случае, если распределение $p(x)$ островершинное ($r_4-3>0$). Для концентрированных (плосковершинных) распределений изменения $p(u)$ относительно $p[\chi^2(u, \nu)]$ не может быть большим, так как $\left|\frac{r_4-3}{8}\right| \leqslant 0{,}25$. Это позволяет надеяться, что в большинстве практически интересных случаев отличие $p(u)$ от $p[\chi^2(u, \nu)]$ будет невелико, так как в реальных экспериментах редко встречается такой разброс результатов, чтобы за пределами $M_1x \pm 3\sqrt{M_2x}$ лежало больше 0,3% опытных данных.

Для островершинных распределений деформация $p(u)$ относительно $p[\chi^2(u, \nu)]$ может быть гораздо более существенной при большом эксцессе распределения $p(x)$. Однако в этом случае деформация $p(u)$ такова, что применение к статистике u квантилей $\chi^2(\alpha, \nu)$ будет только ужесточать критерий. При $\alpha = 5\%$ слева от $\chi^2(\alpha, \nu)$ в случае справедливости гипотезы $M_1x=0$ будет лежать более 95% значений u, если при этом $r_4-3>0$.

Таким образом, для большинства практических задач критерий типа χ^2 оказывается достаточно крепким.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Савенков. Оценка спектральной плотности случайной последовательности, заданной небольшим числом реализаций, для построения прогноза изменения параметров технических объектов в процессе эксплуатации.— Автометрия, 1970, № 5.
2. Д. Лоули, А. Максвелл. Факторный анализ как статистический метод. М., «Мир», 1967.
3. Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965.
4. T. S. Donaldson. Robustness of the F-test to Errors of Both Kinds and the Correlation Between the Numeration and Denominator of the F-test.— J. Amer. Statistical Association, 1968, № 322, 63.

Поступила в редакцию 11 февраля 1972 г.