

С. А. ПОНЫРКО, И. В. СЕМУШИН

(Ленинград, Ульяновск)

О ВЫБОРЕ АЛГОРИТМА НАЧАЛА — ОСТАНОВКИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА

Постановка задачи. Рассмотрим линейную дискретную систему с N входными и одной выходной координатами, имеющими постоянный период дискретизации T . Уравнение такой системы в общем случае может быть представлено в виде

$$\varepsilon(kT, \mathbf{c}) = H(z, \mathbf{c})x(kT), \quad (1)$$

где $x(kT) = \|x_1(kT), \dots, x_N(kT)\|'$ — дискретные значения входного вектора (штрих означает транспонирование); $H(z, \mathbf{c}) = \|H_1(z, \mathbf{c}), \dots, H_N(z, \mathbf{c})\|$ — вектор линейных операторов или передаточных функций системы; $\varepsilon(kT, \mathbf{c})$ — значения выходной координаты; $\mathbf{c} = \|c_1, \dots, c_r\|'$ — вектор параметров; z — оператор опережения на период T или переменная z -преобразования; kT — дискретное время. Пусть $x(kT)$ принадлежит ансамблю реализаций нормального случайного централизованного процесса и критерием качества системы является функционал

$$I(\mathbf{c}) = E\{\varepsilon^2(kT, \mathbf{c})\}, \quad (2)$$

где E — символ математического ожидания.

При минимизации функционала (2), доступного для наблюдения лишь в виде реализаций (1), широко используется дискретный поисковый алгоритм обучения

$$\mathbf{c}[n] = \mathbf{c}[n-1] - \Gamma[n]\varepsilon(kT, \mathbf{c}[n-1])\theta(kT, \mathbf{c}[n-1]), \quad (3)$$

соответствующий многомерной процедуре Роббинса — Монро метода стохастической аппроксимации, где $n=1, 2, \dots$ — номер шага минимизации;

$$\Gamma[n] = \text{diag}\{\gamma_1[n], \dots, \gamma_r[n]\},$$

$$\theta(kT, \mathbf{c}[n-1]) = \|\theta_1(kT, \mathbf{c}[n-1]), \dots, \theta_r(kT, \mathbf{c}[n-1])\|',$$

$$\theta_j(kT, \mathbf{c}[n-1]) = \frac{\partial H(z, \mathbf{c}[n-1])}{\partial c_j[n-1]} x(kT) \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Как известно, при выполнении условий

$$a) E\{\varepsilon^2(kT, \mathbf{c}) \theta'(kT, \mathbf{c}) \theta(kT, \mathbf{c})\} \leq B(1 + \mathbf{c}'\mathbf{c}), B > 0,$$

$$б) \gamma_j[n] > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_j[n] = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_j^2[n] < \infty \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (4)$$

алгоритм (3) сходится почти наверное к оптимальному значению $\mathbf{c} = \mathbf{c}^*$, доставляющему минимум функционалу (2) [1].

Пусть условия задачи таковы, что факторы, определяющие необходимость минимизации, остаются неизменными в пределах чередующихся интервалов времени случайной длительности. В этих условиях необходимость минимизации возникает всякий раз при переходе от одного интервала к другому, но сами моменты перехода средствами алгоритма (3) не могут быть обнаружены. Это обстоятельство требует введения специального алгоритма начала (пуска) процедуры (3). С

другой стороны, должен быть введен и некоторый алгоритм остановки, позволяющий зафиксировать значения параметров c_j при установлении их колебаний в некоторой окрестности оптимального значения c_j^* . В связи с этим поставим задачу такой модификации основного алгоритма (3), которая совмещала бы в себе указанные функции начала, продолжения и остановки процесса обучения.

Построение модифицированного алгоритма. Прежде всего отметим, что алгоритм начала — остановки, дополняющий основной алгоритм (3), может быть одновременно правилом и начала, и остановки (а не только начала или только остановки) при условии использования в нем процессов до умножения на исчезающую матрицу $\Gamma[n]$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_j[n] = 0$. В частности, известные алгоритмы остановки [2], не учитывающие этого обстоятельства, не могут быть приспособлены для выполнения функций начала.

Алгоритм начала — остановки будем строить, исходя из условия оптимальности системы, которое представим в виде двух эквивалентных соотношений:

$$а) \mathbf{R} = \|R_1, \dots, R_r\| = 0; \quad б) \boldsymbol{\rho} = \|\rho_1, \dots, \rho_r\| = 0, \quad (5)$$

где

$$R_j = E\{\varepsilon(kT, \mathbf{c}) \theta_j(kT, \mathbf{c})\}; \quad \rho_j = R_j / I(\mathbf{c}) D_j;$$

$$D_j = E\{\theta_j^2(kT, \mathbf{c})\} \quad (j=1, 2, \dots, r).$$

Рассматривая возможности использования каждого из соотношений (5), остановим выбор на последнем, как оперирующем с безразмерной величиной вектора $\boldsymbol{\rho}$ коэффициентов корреляции ρ_j и, следовательно, в меньшей степени зависящем от абсолютных значений входных процессов $x_i(kT)$. Последнее обстоятельство особенно важно при наличии на входе аддитивных помех с высоким уровнем σ соотношения помеха/сигнал, например, в задачах адаптивной фильтрации [3, 4].

Для оценки компоненты ρ_j воспользуемся известным выражением

$$\pi^{-1} \arcsin \rho_j = 0,5 - P_j = f_j^*, \quad (6)$$

связывающим эту величину с вероятностью P_j отрицательных выбросов процесса

$$u_j(kT, \mathbf{c}) = \varepsilon(kT, \mathbf{c}) \theta_j(kT, \mathbf{c}). \quad (7)$$

При этом получаем наиболее простую как в аппаратной реализации, так и при программировании оценку величины (6) в виде

$$f_j = 0,5 - m_j/M, \quad (8)$$

отвечающем известному принципу полярного коррелятора. Здесь m_j — число отрицательных выбросов в выборке объемом M последовательных значений процессов (7), которая может быть как скользящей, так и периодически повторяющейся. Последний вариант более экономичен, так как требует лишь r накопительных счетчиков емкостью M единиц каждый с общим сигналом установки нуля

$$h(kT) = \begin{cases} 0, & K/M \text{ — целое;} \\ 1, & K/M \text{ — нецелое,} \end{cases}$$

поступающим каждые MT секунд.

Теперь задачу обнаружения неоптимальности (или оптимальности) системы представим как процесс принятия решения b_j относительно значения ρ_j , если основываться на данных (8), в соответствии с пра-

вилом решения $a(b_j/f_j)$. Применяя пороговое обнаружение, это правило запишем в виде

$$b_j = b_j(kT) = \begin{cases} 0, & |f_j| < a_j; \\ 1, & |f_j| \geq a_j, \end{cases} \quad (9)$$

где a_j — j -й порог, причем значению $b_j=0$ соответствует решение «остановить», а значению $b_j=1$ — решение «начать». Решение (9) в случае периодически повторяющейся выборки принимается лишь в моменты установки нуля (при $h(kT)=0$) и запоминается далее на весь последующий период длительностью MT секунд.

Формализуя изложенное, получим следующий алгоритм начала — остановки (записанный для удобства в терминах алгоритмического языка АЛГОЛ-60):

```

begin
  integer k, h, t, j, r, M, kM;
  integer array m, b, d, q, [1:r]; real array u, f, a, [1:r];
  k:=0; h:=t:=1;
  for j:=1 step 1 until r do m[j]:=b[j]:=0;
  A:k:=k+1; for j:=1 step 1 until r do
  begin
    if u[j]<0 then d[j]:=1 else d[j]:=0;
    f[j]:=0,5-m[j]/M; m[j]:=(m[j]+d[j])×h;
    if abs(f[j])<a[j] then q[j]:=0 else q[j]:=1;
    b[j]:=b[j]×h+q[j]×(1-h)
  end;
  if k<kM then
    begin if k=Mt then
      begin h:=0; t:=t+1; goto A end else
      begin h:=1; goto A end
    end else;
end

```

Здесь, кроме очевидных, использованы следующие соответствия:

переменная	идентификатор
$u_j(kT, c)$	$u[j]$
$b_j(kT)$	$b[j]$

а также введены вспомогательные идентификаторы: $q[j]$, $d[j]$, t , kM (последний — то значение дискретного времени k , до которого распространяется действие алгоритма).

Теперь нетрудно видеть, что модифицированный алгоритм обучения

$$\begin{aligned} c(kT) &= c(kT-T) - \Gamma(kT) \varepsilon(kT, c(kT-T)) \theta(kT, c(kT-T)), \\ \Gamma(kT) &= \text{diag} \{ \gamma_1 [n_1(kT)] b_1(kT), \dots, \gamma_r [n_r(kT)] b_r(kT) \}, \\ n_j(kT) &= [n_j(kT-T) + 1] b_j(kT), \quad n_j(0) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, r), \end{aligned} \quad (10)$$

в котором величины $\gamma_j [n_j(kT)]$ совпадают с $\gamma_j [n]$ из [(4), б)] при $n_j(kT)=n$ и который удовлетворяет условиям поставленной задачи.

Оценка параметров алгоритма. Строгая (байесова) оптимизация построенного алгоритма существенно затруднена из-за его нелинейности и недостаточности априорной информации, поэтому при оценке параметров a_j и M основными являются приближенные методы и математическое моделирование на ЦВМ.

Исходя из этого, расчет объема выборки M произведем из условия $\max_j D [f_j] \leq \eta$, где $D [f_j]$ — дисперсия оценки (8); η — заданный уровень точности. Отсюда, пользуясь известной процедурой вычисления этой дисперсии [5], получим

$$M \geq \frac{2}{\eta} \max_j \left\{ \varphi_j^{-1}(0) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_j(kT) \right\} = \frac{1}{\eta} \max_j \left(1 + \frac{\Phi_j(1)}{\varphi_j(0)} \right), \quad (11)$$

где

$$\varphi_j(kT) = E \{u_j(lT, \mathbf{c}) u_j(lT + kT, \mathbf{c})\} \text{ и } \Phi_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} \varphi_j(kT)$$

являются соответственно корреляционной функцией и спектральной плотностью процесса (7).

Оценка величины M является наиболее важной в случае некоррелированности перемножаемых значений $\varepsilon(kT, \mathbf{c})$ и $\theta_j(kT, \mathbf{c})$, отвечающей оптимальной работе системы (при $\mathbf{c}=\mathbf{c}^*$). В этих условиях можно считать, что интервалы корреляции

$$l[u_j] = \varphi_j^{-1}(0) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_j(kT) \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

процессов (7), равных произведениям процессов $\varepsilon(kT, \mathbf{c})$ и $\theta_j(kT, \mathbf{c})$, не больше интервала корреляции

$$l[\varepsilon] = \psi^{-1}(0) \sum_{k=0}^{\infty} \psi(kT)$$

из общего сомножителя $\varepsilon(kT, \mathbf{c})$, где $\psi(kT)$ — корреляционная функция процесса (1). Отсюда и из (11) находим приемлемую с практической точки зрения оценку величины M :

$$M \geq \frac{2}{\eta} l[\varepsilon] = \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{\Psi(1)}{\Psi(0)} \right), \quad (12)$$

где

$$\Psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} \Psi(kT) = \mathbf{H}(z^{-1}, \mathbf{c}) \Phi_{xx}(z) \mathbf{H}'(z, \mathbf{c}) \quad (13)$$

спектральная плотность процесса (1); $\Phi_{xx}(z)$ — спектральная матрица входов $\mathbf{x}(kT)$.

Предварительную оценку значений порогов a_j будем искать, исходя из условия

$$\Delta = \frac{l(\mathbf{c})}{\min l(\mathbf{c})} = F(|f_j^*|) < \Delta_*, \quad (14)$$

где Δ — «рассогласование» системы, рассматриваемое здесь как функция F модулей величин (6), Δ_* — допустимое рассогласование. Окончательные же оценки параметров a_j , M установим при моделировании всех алгоритмов на ЦВМ.

Проведем все оценки одноканального ($N=1$) активного самонастраивающегося фильтра, для которого процесс (1) обозначен в [3] через $\varepsilon(kT)$. Непосредственно по формуле (13) установим, что при различных и известных полюсах дробно-рациональной спектральной плотности $\Phi_{xx}(z)$ и выборе структуры и параметров фильтра оптимальными выполняется соотношение

$$\psi(kT) \equiv 0, \quad s \leq |k| < \infty,$$

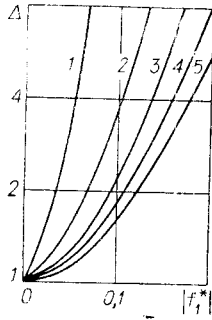
где s — число указанных полюсов. Отсюда $l[\varepsilon] \leq s$, и из (12) получаем простое условие для выбора M .

$$M \geq 2s/\eta. \quad (15)$$

Оценку порога a_1 проведем на примере фильтра первого порядка ($s=r=1$) с передаточной функцией

$$G_1(z, \mathbf{c}) = (1 - c_1 d^{-1}) / (1 - c_1 z^{-1}) \quad (16)$$

при $d=0,96$ [6]. Принимая $\eta=0,001$ и $\eta=0,004$, из (15) соответст-



венно находим $M \geq 2000$ и $M \geq 500$. По зависимости $\Delta = F(|f_1^*|)$, построенной для различных значений σ соотношения помеха/сигнал ($\sigma = 100; 10; 1,0; 0,1; 0,01$; кривые 1—5, рис. 1), при $\Delta_* = 2$ находим предварительно $a_1 \approx 0,03 \div 0,12$.

Уточненные значения a_1 установим по результатам моделирования алгоритма начала — остановки, применяя следующие обозначения: σ_1, σ_2 — два уровня соотношения σ , изменяющегося скачком

Рис. 1. Увеличение дисперсии ошибки фильтрации относительно ее максимального значения при введении отклонения*

при $k = k_1$ (рис. 2, а); $c_{1(1)}^*, c_{1(2)}^*$ — соответствующие им два оптимальных значения параметра c_1^* параметра c_1 , начало перестройки которого выбрано при $k = k_2 > k_1$, а окончание — около значения $k = kM$ (см. рис. 2, б). Расчет проведем при $M = 2000$; $k_1 = 10\,301$; $k_2 = 20\,301$; $kM = 60\,301$ (рис. 3, а, б) и при $M = 500$, $k_1 = 2801$; $k_2 = 5301$; $kM = 15\,301$ (см. рис. 3, в, г). Значения f_1 [см. (8)] выведем соответственно через 2000 и 500 значений на график. Полученные данные многократного моделирования, часть которых представлена на рис. 3, показывает, что «расстройка» фильтра, вводимая в момент $k = k_1$ и постепенно исчезающая при $k_2 < k \leq kM$, достаточно хорошо обнаруживается «всплеском» признака f_1 в интервале $k_1 < k \leq k_2$ наибольшей расстройки. При $M = 500$ находим уточненную оценку $a_1 \approx 0,07 \div 0,12$.

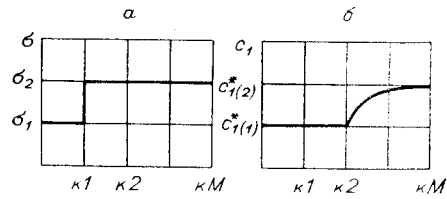


Рис. 2. Условия моделирования алгоритма начала — остановки.

а — изменение соотношения σ помеха/сигнал; б — изменение параметра c_1 фильтра.

Используя эти данные, проведем моделирование полного (модифи-

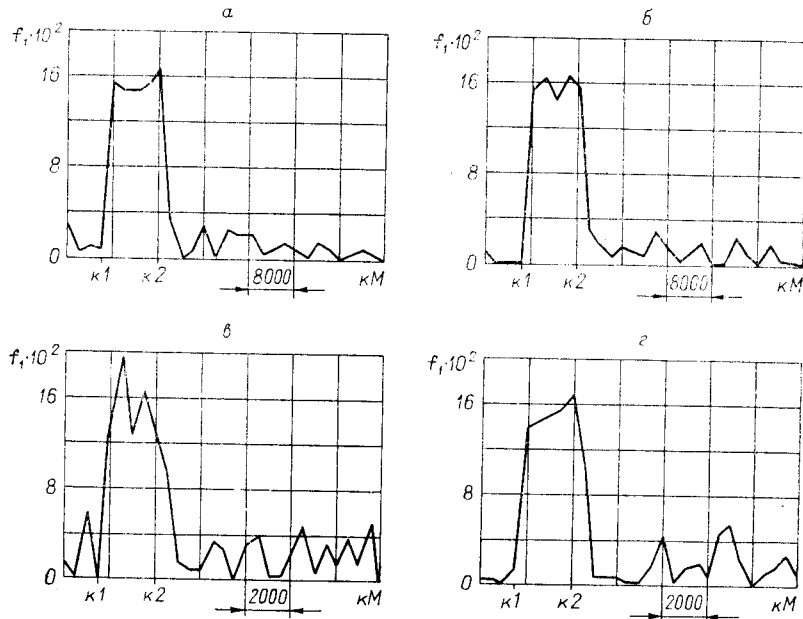


Рис. 3. Обнаружение неоптимальности фильтра «всплеском» признака f_1 : а — $M = 2000$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 1,0$; б — $M = 2000$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 10$; в — $M = 500$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 1,0$; г — $M = 500$; $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 10$.

цированного) алгоритма обучения (10) при гармоническом изменении компонент матрицы $\Gamma(kT)$ ($\gamma_i[n] = 1/n$), обеспечивающем выполнение условий [(4), б)] в процессе настройки, для фильтра (16) при $d=0,99$. Теперь изменение соотношения σ помеха/сигнал зададим в виде двух скачков (рис. 4), приближая условия моделирования к реальным условиям работы системы. Моделирование проведем для различных значений порога a_1 при $M=500$; $k_1=4501$; $k_2=8501$; $kM=25\ 001$. На график выведем величину $\delta_1(kT) = c_1(kT)/c_1^*$, характеризующую расстройку фильтра (рис. 5).

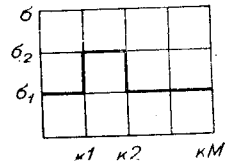


Рис. 4. Характер изменения соотношения σ помеха/сигнал при моделировании полного алгоритма обучения.

Приведенные и другие полученные результаты моделирования (выполненного при $M=250$; 2000) показывают, что увеличение объема выборки, уменьшая частоту ошибочных решений в алгоритме начала — остановки, одновременно ведет к увеличению длительности процесса настройки, так как сами решения принимаются при этом сравнительно редко (через MT секунд). При уменьшении же M алгоритм обучения (3) включается чаще, но при этом велико относительное число ошибочных включений. Целесообразным оказывается значение $M \approx 500$. С другой стороны, при малых значениях a_1 система практически не выходит из нежелательного режима колебаний настраиваемого параметра вблизи его оптимального значения (см. рис. 5, а, з). Поэтому при $M=500$ в среднем целесообразно принять $a_1 \approx 0,08 \div 0,09$.

Можно полагать, что эти практические рекомендации, основанные на обобщении многих результатов моделирования, могут быть использованы при построении и других, в том числе многопараметрических, адаптивных систем.

Заключение. Для адаптивных систем, минимизирующих среднеквадратический функционал качества в условиях отсутствия априорных сведений относительно необходимости и времени реадаптации, возмож-

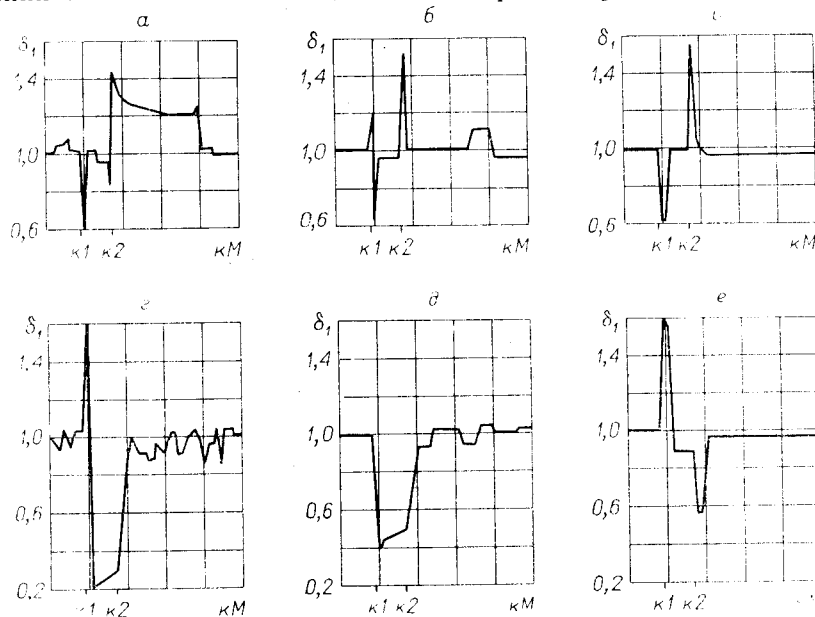


Рис. 5. Поведение адаптивного фильтра при непредвиденном изменении соотношения σ помеха/сигнал:

а — $a_1=0,03$; $\sigma_1=0,1$; $\sigma_2=1,0$; б — $a_1=0,05$; $\sigma_1=0,1$; $\sigma_2=1,0$; в — $a_1=0,10$; $\sigma_1=0,1$; $\sigma_2=1,0$; г — $a_1=0,01$; $\sigma_1=1,0$; $\sigma_2=0,1$; д — $a_1=0,05$; $\sigma_1=1,0$; $\sigma_2=0,1$; е — $a_1=0,10$; $\sigma_1=1,0$; $\sigma_2=0,1$.

но построение правила, производящего оценку этих характеристик по наблюдениям реализаций самого функционала. Оценочные расчеты и данные моделирования позволяют выбрать целесообразные значения параметров указанного правила.

Построенный таким образом алгоритм начала — остановки, раздельный по всем настраиваемым параметрам c_j , позволяет автоматически исключать из процесса многопараметрической минимизации малоинформативные параметры (те параметры, к вариациям которых функционал (2) становится малочувствительным), тем самым уменьшая размерность настройки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Основы теории обучающихся систем. М., «Наука», 1970.
2. Я. З. Цыпкин. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., «Наука», 1968.
3. С. А. Поньрко, И. В. Семушин. Использование активного принципа при построении самонастраивающихся фильтров.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1971, № 1.
4. С. А. Поньрко, И. В. Семушин. Построение обучающихся винеровских фильтров при ограниченном объеме априорной информации.— Изв. АН СССР, «Техническая кибернетика», 1971, № 5.
5. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
6. И. В. Семушин. Многоканальный адаптивный фильтр активного типа.— ИВУЗ, Приборостроение, 1969, № 10.

Поступила в редакцию 18 февраля 1972 г.

УДК 518.5+519.2

М. В. АНТИПОВ
(Новосибирск)

О МОДЕЛИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При изучении процессов, происходящих в сложных системах, не всегда удается получить законченные аналитические соотношения, которые можно было бы использовать при вычислениях. В таких случаях часто бывает полезен метод статистических испытаний. Это относится также к вопросам планирования эксперимента, когда требуется описать характер потоков заявок на обслуживание (см., например, [1]).

Для решения задач методом статистических испытаний необходимо иметь последовательности случайных величин с заданной функцией распределения. В работе предлагаются стандартные алгоритмы и программы получения псевдослучайных величин с наиболее распространенными функциями распределения для ЭВМ типа «Минск-22». В соответствии с требованиями, предъявленными к датчикам псевдослучайных чисел [2] при хорошем статистическом качестве и наибольшем периоде псевдопоследовательности, минимизировалось время получения одного псевдослучайного числа.

Алгоритм 1. Равномерное распределение в интервале [0,1]. Получению и оценке псевдослучайных чисел с равномерным распределением