Методы модуляции энергетических параметров сигнала $s(t;\ \bar{m})$ позволяют учитывать различную информативность компонент вектора $\bar{m}$ в отличие от модуляции неэнергетических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сокращение избыточности. Тематический выпуск.— ТИИЭР, 1967, т. 55, № 3.
2. Л. Дэвиссон. Теоретический анализ систем сжатия данных.— ТИИЭР, 1968, т. 56, № 2.
3. P. Wintz, A. Kurtenbach. Waveform Error Control in PCM Telemetery.— IEEE Tr., 1968, v. IT-14, № 5.
4. Дж. Возенкрафт, И. Джекобс. Теоретические основы техники связи, М., «Наука», 1969.
5. С. Е. Фалькович. Оценка параметров сигнала. М., «Советское радио», 1970.
6. В. А. Свириденко. Помехоустойчивость цифровых методов передачи аналоговых сообщений с повышенной информативностью.— Радиотехника, 1973, № 4.
7. В. А. Свириденко. Энергетическая эффективность кодирования источника аналоговых сообщений, передаваемых по каналу с шумом.— Труды V конференции по теории кодирования и передачи информации, секция VI. Кодирование в сложных системах. Обработка сообщений. М.— Горький, 1972.
8. W. Wolf, R. Elsner. Über die Minimisierung von Abtast — Quantisierungs und Kanalfehler.— AEÜ, 1971, v. 25, № 4.
9. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
10. В. Давенпорт, В. Рут. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
11. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных случайных функций.— УМН, 1952, т. VII, вып. 5 (51).

Поступила в редакцию 3 августа 1971 г.

УДК 512.24

В. С. КИРИЧУК, Б. Н. ЛУЦЕНКО

(Новосибирск)

ОБНАРУЖЕНИЕ ЗНАЧИМЫХ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Пусть имеется комплекс n измерительных средств, обслуживающих некоторый эксперимент. Исследуемый процесс в каждый момент времени характеризуется m-мерным вектором параметров A. Некоторые из приборов могут поставлять на всем интервале наблюдения смещенные данные. Смещение предполагается постоянным во времени. Игнорирование этих систематических ошибок при обработке приводит к недостоверным результатам. Обращение же к общей модели, предполагающей наличие постоянных ошибок в показаниях всех приборов, существенно занижает точность получаемых оценок. Представляется целесообразным выделить из всего комплекса средства, данные от которых не содержат систематических ошибок. Построение и последующее использование скорректированной модели, предполагающей смещение лишь в части приборов, приводят к более точным оценкам параметров. Эффект особенно ощутим, если удается выделить m достоверных приборов, позволяющих однозначно охарактеризовать состояние исследуемого явления в каждый момент времени.

Принимаем, что случайные погрешности измерений аддитивны и нормальны и имеют нулевые средние значения, корреляция во времени отсутствует, т. е.

$$X(t)=F[A(t)]+\Xi(t)+M. \tag{1}$$

Смысл символов в (1) следующий: параметр t указывает на то, что соотношение рассматривается в момент времени t; $t=\overline{t_1, t_N}$; $X(t)$ — n-мерный вектор, составленный из показаний n приборов; $F[A(t)]$ — вектор истинных значений измеряемых величин; $\Xi(t)$ — n-мерный вектор случайных погрешностей;

$$\Xi(t)\in N(0,\sigma^2K(t)).$$

Полагаем, что корреляционные матрицы $K(t)$ известны. M — n-мерный вектор систематических погрешностей, часть компонент которого нулевые. Задача имеет смысл лишь в том случае, если по крайней мере с m приборов снимаются несмещенные данные.

Зависимость результатов измерений $X(t)$ от вектора параметров $A(t)$ в общем случае нелинейна. И, разумеется, первое, с чем приходится сталкиваться при ее определении,— выбор нулевого приближения для $A(t)$. Трудность традиционная; ее преодоление обычно прекрасная сфера для фантазии исследователя. Мы не будем останавливаться на обсуждении различных частных вариантов, ибо определяющую роль здесь играет специфика задач.

Допуская, что механизм построения нулевого приближения вектора $A(t)$ выбран, используем далее обычную ньютоновскую итерационную процедуру уточнения вектора $A(t)$. В основу обработки положим метод максимального правдоподобия. Предполагаем, что уровень систематических погрешностей настолько низок, что сходимость итерационной процедуры не нарушается.

$$\hat{A}_{\nu+1}(t)=\hat{A}_\nu(t)+\Delta\hat{A}_\nu(t);\ \Delta\hat{A}_\nu(t)=\left[D^T(t)K^{-1}(t)D(t)\right]^{-1}\times$$
$$\times K^{-1}(t)D^T(t)\left\{X(t)-F\left[\hat{A}(t)\right]\right\}. \tag{2}$$

Здесь D — матрица (размерность $n\times m$) частных производных измеряемых величин по параметрам $\{\hat{A}(t)\}_i$. Уточнение $A(t)$ проводим до вхождения вектора поправок $\Delta\hat{A}(t)$ в назначаемую заранее ε-окрестность. Строим для каждого момента времени t вектор разности между результатами измерений и их сглаженными значениями. Алгоритм выделения «подозрительных» средств строим на простой модели, предусматривающей наличие только случайных погрешностей:

$$\Delta X(t)=X(t)-F\left[\hat{A}(t)\right]. \tag{3}$$

При низком уровне погрешностей вектор $\Delta X(t)$ будет приближенно нормален:

$$\Delta X(t)\in N(0,\sigma^2B(t);\ B(t)=K(t)-D(t)\left[D^T(t)K^{-1}(t)D(t)\right]^{-1}D^T(t). \tag{4}$$

По значениям $\Delta X(t)$ на всем интервале наблюдения $(t=\overline{t_1, t_N})$ оценим математическое ожидание $\Delta x_i(t)$ всех n приборов. Непосредственный учет корреляции компонент $\Delta X(t)$ затруднителен ввиду вырожденности матрицы $B(t)$. Можно ограничиться лишь учетом их весов, прибегнув к методу наименьших квадратов

$$\hat{M}=\left[\sum_{i=1}^{N}P^{-1}(t_i)\right]^{-1}\sum_{i=1}^{N}P^{-1}(t_i)\Delta X(t_i). \tag{5}$$

Здесь $P(t)$ — диагональная матрица с элементами, равными диагональным элементам $B(t)$. Теперь решим, смещение какого из средств наиболее значимо. Для этого необходимо располагать дисперсиями оценок $\{\hat{M}\}_i$. Если действовать на уровне строгости выражения (4), корреляционная матрица вектора будет иметь вид

$$B(\hat{M}) = \left[\sum_{i=1}^{N} P^{-1}(t_i)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} P^{-1}(t_i) B(t_i) P^{-1}(t_i) \left[\sum_{i=1}^{N} P^{-1}(t_i)\right]^{-1},$$

а дисперсии его компонент —

$$\sigma_{m_i}^2 = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{\{B(t_j)\}_{ii}}}.$$

Средство, соответствующее максимальному

$$\Delta_i = \frac{|\{\hat{M}\}_{ii}|}{\sqrt{\sigma_{m_i}^2}} = \frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{\Delta x_i(t_j)}{\{B(t_j)\}_{ii}}\right|}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{\{B(t_j)\}_{ii}}}}, \tag{6}$$

исключается из последующей обработки [1, 2]. Описанную выше процедуру оценивания вектора параметров $\hat{A}(t)$, а затем и $\hat{M}$ повторяем с оставшимися средствами и вновь выявляем «подозрительное» средство, которое будет изъято на следующем шаге обработки.

Теперь необходимо построить критерий, позволяющий обоснованно прекращать эту процедуру отбраковки, т. е. фиксировать момент, когда оставшиеся данные уже не будут содержать значимых смещений. Для этого после отбрасывания показаний, по крайней мере, одного прибора на каждом следующем этапе обработки вычисляем

$$\tau_l = \delta_l / \sqrt{S_{n-l}^2}, \tag{7}$$

где l — число отброшенных средств; S_{n-l}^2 — аналог оценки дисперсии;

$$S_{n-l}^2 = \frac{1}{N(n-m-l)} \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta X_{n-l}^T(t_i) K_{n-l}^{-1}(t_i) \Delta X_{n-l}(t_i)\right]; \tag{8}$$

$\Delta X_{n-l}(t_i)$ — $(n-l)$-мерный вектор, соответствующий $n-l$ участвующим в обработке средствам; $K_{n-l}(t_i)$ — корреляционная матрица шума средств, участвующих в обработке; δ_l — взвешенное отклонение i-го средства, отброшенного на предыдущем l-м этапе обработки;

$$\delta_l = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta x_i(t_j)}{\{B_l(t_j)\}_{ii}} \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\{B_l(t_j)\}_{ii}}}. \tag{9}$$

Обратим внимание, что $\{B_l(t_j)\}_{ii}$ в отличие от (4) имеет вид

$$\{B_l(t_j)\}_{ii} = \{K(t_j)\}_{ii} + d_i(t_j) \left[D_{n-l}^T(t_j) K_{n-l}^{-1}(t_j) D_{n-l}(t_j)\right]^{-1} d_i^T(t_j). \tag{10}$$

В выражении (10) $d_i(t_j)$ и $D_{n-l}(t_j)$ вычислены по показаниям $n-l$ приборов. $D_{n-l}(t_j)$ — матрица частных производных, соответствующая этим средствам; $d_i(t_j)$ — вектор-строка производных, отвечающая средству, отброшенному на l-м шаге.

Выявление и изъятие «подозрительных» измерений проводится до тех пор, пока оставшиеся данные не будут признаны достоверными. Фиксация этого момента может осуществляться по-разному в зависимости от информации, которой располагает исследователь. К примеру, пусть имеется 20 средств и допускается, что с вероятностью 0,5 их показания будут поражаться значимыми систематическими ошибками.

Тогда с вероятностью 0,94 окажутся достоверными показания, по крайней мере, 7 средств, с вероятностью 0,98—6 средств, с вероятностью 0,99 — 5 средств. Следовательно, отбраковку необходимо прекращать на 5—6 средствах, если по ним можно однозначно оценить состояние исследуемого процесса. В ряде случаев бывает известен диапазон возможных значений дисперсии случайного шума. «Останов» при этом можно осуществить следующим образом. Возьмем в качестве дисперсии максимально возможное значение из этого диапазона $\sigma^2_{\max}$, и отбраковку проводим до тех пор, пока с некоторой выбранной вероятностью P не будет принята гипотеза о равенстве $|M_i|$ нулю:

$$|M_i| \leqslant q\sigma_{\max} \Bigg/ \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\{B_l(t_j)\}_{ii}}}, \qquad (11)$$

где q определяется из соотношения

$$P^{\frac{1}{n-l-1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-q}^{q} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\Phi(q) - 1.$$

Стремление повысить надежность исключения недостоверных данных приводит к значительному повышению вероятности отбраковки хороших средств. Для проведения более четкой грани между достоверными и недостоверными массивами измерений исследуем поведение статистики τ_l [3].

При наличии в выборке нескольких значимых смещений оценка дисперсии (8) недостоверна и статистика (7) принимает произвольные значения. Момент исключения последнего средства со смещением сопровождается резким возрастанием величины τ_l, которая в данном случае выражает в единицах оценки дисперсии величину систематической погрешности в последнем из отброшенных средств. Далее исключаются массивы достоверных измерений. Это, естественно, приводит к усечению распределения величин $\Delta X(t_j)$ [2], но, поскольку отбрасываются целые массивы измерений, соответствующие «подозрительным средствам», усечение проявляется незначительно.

После изъятия последнего недостоверного параметра статистика τ_l распределена как максимальный элемент выборки объема $n-l$, подчиненной закону распределения Стьюдента $t(y)$ с $(n-l-m-1)N$ степенями свободы. Задавая уровень значимости α (вероятность отбросить хорошее средство), вычисляем на каждом шаге величину квантиля θ_l, согласно выражению

$$(1-\alpha)^{\frac{1}{n-l}} = \int_{-\theta_l}^{\theta_l} t_{(n-l-m-1)N}(y)\, dy.$$

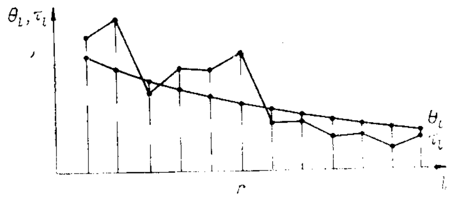
При большом числе степеней свободы вместо распределения Стьюдента можно использовать нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда

$$(1-\alpha)^{\frac{1}{n-l}} = 2\Phi(\theta_l) - 1.$$

Момент, в который следовало бы прекратить отбраковку, определяем в процессе сравнения статистик τ_l с квантилями θ_l. Сравнение проводим в направлении, обратном отбраковке. Фиксируем точку, при которой ломаная τ_l впервые снизу вверх пересечет ломаную квантилей θ_l, т. е. впервые удовлетворится система неравенств:

$$\begin{cases} \tau_r > \theta_r; \\ \tau_{r+1} < \theta_{r+1}. \end{cases}$$

Описанная ситуация представлена на рисунке. Все средства, соответствующие значениям l, лежащим левее точки останова, включая и точку останова ($l \leqslant r$), считаются недостоверными, т. е. содержащими систематические погрешности. Оценим величины этих погрешностей по всем достоверным данным:



$$\hat{M}_r = \left[\sum_{i=1}^{N} B_r^{-1}(t_i)\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} B_r^{-1}(t_i)\,\Delta X_r(t_i)\right]; \qquad (12)$$

$$B_r(t_i) = K_r(t_i) + D_r(t_i)\left[D_{n-r}^T(t_i)\,K_{n-r}^{-1}(t_i)\,D_{n-r}(t_i)\right]^{-1} D_r^T(t_i).$$

Символы здесь имеют тот же смысл, что и в (10). $D_r(t_i)$ — матрица частных производных показаний отброшенных средств по параметрам.

Если $m<r$, выражения (12) можно преобразовать с тем, чтобы понизить порядок обращаемой в каждый момент времени матрицы до m. Для этого воспользуемся формулой обобщенного обращения [4]:

$$B_r^{-1}(t_j) = K_r^{-1}(t_j) - K_r^{-1}(t_j)\,D_r(t_j)\left[D_r^T(t_j)\,K_r^{-1}(t_j)\,D_r(t_j) + D_{n-r}^T(t_j)\,\times\right.$$
$$\left.\times\, K_{n-r}^{-1}(t_j)\,D_{n-r}(t_j)\right]^{-1} D_r(t_j)\,K_r^{-1}(t_j) = K_r^{-1}(t_j) - W_r(t_j).$$

Естественно, это имеет смысл в случае диагональной $K_r(t_i)$. На последнем шаге, когда исчерпаны все данные, придется один раз обратить матрицу размерности $r \times r$.

Точность вектора оценок $\hat{M}_r$ характеризуется корреляционной матрицей

$$K_M = S_{n-r}^2 \left(\sum_{i=1}^{N}\left[K_r^{-1}(t_i) - W_r(t_i)\right]\right)^{-1}.$$

Здесь S_{n-r}^2 определяется согласно (8). При необходимости получения более точных оценок систематических погрешностей можно прибегнуть к методу структурной избыточности [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. T. I. Anscombe. Rejection of Outliers.— Technometrics, 1960, v. 2, № 2.
2. Введение в теорию порядковых статистик.— Серия «Зарубежные статистические исследования». М., «Статистика», 1970.
3. В. С. Киричук, Б. Н. Луценко. Обработка данных при наличии аномальных измерений.— Расширенные тезисы на Симпозиуме по автоматизации на основе применения ЭЦВМ. Новосибирск, 1971.
4. С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968.
5. Б. М. Пушной, Г. П. Чейдо. Методы использования структурной избыточности измерительной системы при обработке экспериментальных данных с систематическими погрешностями.— Автометрия, 1970, № 5.

Поступила в редакцию 21 января 1971 г.