Дифференцирование по t (17) дает выражение для плотности распределения

$$f_{\psi_i}(t/L>0)=\frac{1}{\int\limits_0^\infty f_L(\tau)\,d\tau}\int\limits_0^\infty f_\theta(\tau_1)\,d\tau_1\int\limits_0^{\tau_1} f_Q(\tau_2)\,f_{V_i}(t-\tau_1+\tau_2/\tau_1)\,d\tau_2. \quad (18)$$

Вычисление в (18) условной плотности распределения $f_{V_i}(t-\tau_1+\tau_2/\tau_1)$ производится по (16).

Среднее время между двумя последовательными моментами окончания обслуживания i-го разряда ($i=1, 2, \ldots, N$), как нетрудно видеть, равно математическому ожиданию $\bar{\theta}$ интервала времени между двумя соседними этапами обслуживания. Поэтому интенсивности β_1 и β_c потоков обслуженных заявок некоторого источника и всей системы в целом равны:

$$\beta_1=\frac{1}{\bar{\theta}}\int\limits_0^\infty f_L(\tau)\,d\tau;\quad \beta_c=\beta_1 N.$$

Таким образом, проведенное исследование двух моделей позволяет при задании исходных параметров системы обоснованно выбрать тот или иной алгоритм обработки запросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Th. Runneneburg. Machines Served by a Patrolling Operator, 1957, July (prepublication copy).
2. C. Mack, T. Murphy, N. L. Webb. The Efficiency of N Machines unidirectionally Patrolled by one Operative when Walking Time and Repair Time are Constants.— J. Roy. Statist. Soc., 1957, Ser. B, v. 19, № 1.
3. А. Д. Соловьев. Задачи о циклическом обслуживании.— В сб. Прикладные задачи технической кибернетики». М., «Советское радио», 1966.

Поступила в редакцию 21 октября 1972 г.

УДК 631.291.27

В. М. ЕФИМОВ, З. А. ЛИВШИЦ

(Новосибирск)

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ СЖАТИЯ ДАННЫХ

1.1. В работе* были обсуждены вопросы оптимизации сжатия данных в системе, использующей предсказатель с фиксированной апертурой; при этом рассматривалась ситуация, когда варьируемыми параметрами являются амплитудное разрешение сигналов (ширина апертуры) и величины шагов дискретности по координатам многомерного случайного поля (в частности, шаг квантования по времени). В данной

* В. М. Ефимов, З. А. Лившиц. Оптимизация систем сжатия, использующих предсказатель с фиксированной апертурой.— Автометрия, 1972, № 4.

работе изучаются возможности повышения эффективности компрессии путем использования различных типов линейных преобразований сигналов на входе системы сжатия (компрессора).

1.2. Ниже существенно используются определения и результаты работы*; как и в*, рассматривается задача минимизации числа отсчетов на выходе компрессора с единичного «объема» пространства, на котором определено случайное поле, при фиксированном значении максимума среднего квадрата ошибки воспроизведения; отличие от * состоит в том, что, как указывалось в п. 1.1, предполагаются допустимыми некоторые линейные преобразования сигналов.

2.1. Рассмотрим одномерный случай, когда подлежащий сжатию сигнал является случайной функцией одной координаты (для определенности времени). Как показано в *, при высокой точности воспроизведения среднее число отсчетов в единицу времени для стационарных гауссовских сигналов задается следующей асимптотической формулой:

$$\lambda \cong \frac{1}{\tau}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{z}\left(1-\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]\right)+1-2\Phi(z)\right], \tag{1}$$

где

$$z=\frac{q}{\sqrt{2(R(0)-R(\tau))}}; \tag{2}$$

τ — шаг квантования по времени; q — ширина апертуры (шаг квантования по уровню); $R(\tau)$ — корреляционная функция сигнала на входе компрессора.

Если сигнал с корреляционной функцией $\sigma^2\rho(\tau)$ перед подачей на компрессор пропускается через линейный фильтр с весовой функцией $w(t)$, то

$$R(0)-R(\tau)=\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt w(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta w(\theta)\left[\rho(t-\theta)-\rho(\tau+t-\theta)\right], \tag{3}$$

а q определяется из условия фиксированной точности воспроизведения

$$\varepsilon^2 \cong \max_{\Delta\in[0,\tau]}\sigma^2\left[1-2\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt w(t)\rho(\Delta+t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt w(t)\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta w(\theta)\rho(t-\theta)\right]+\frac{q^2}{12}. \tag{4}$$

Минимизация (1) [с учетом (3)] при условии (4) позволила бы определить характеристику оптимального фильтра $w(t)$ и компрессора (q, τ) при дискретном считывании на входе. Однако следует заметить, что назначение предфильтра содержательно состоит в «сглаживании» сигнала с «небольшими» искажениями, а, как было показано в *, для достаточно гладких сигналов наиболее эффективно непрерывное считывание на входе компрессора. Поэтому мы обратимся к изучению именно этой ситуации, т. е. случая, когда сигнал после прохождения предфильтра подается на предсказатель с фиксированной апертурой, работающей в режиме непрерывного считывания ($\tau=0$). Тогда, как следует из * и формул (3), (4), задача сводится к минимизации

$$\lambda \cong \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\sqrt{\frac{-\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt w(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta w(\theta)\rho^{II}(t-\theta)}{\varepsilon^2-\sigma^2\left[1-2\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt w(t)\rho(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt w(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta w(\theta)\rho(t-\theta)\right]}}, \tag{5}$$

*В. М. Ефимов, З. А. Лившиц. Оптимизация систем сжатия, использующих предсказатель с фиксированной апертурой.— Автометрия, 1972, № 4.

или в терминах спектров

$$\lambda \cong \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \sqrt{\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\omega^2 S(\omega)|W(\omega)|^2}{\varepsilon^2 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega S(\omega)|1 - W(\omega)|^2}}, \tag{6}$$

где $\rho^{II}(t-\theta)$ — вторая производная нормированной корреляционной функции; $S(\omega)$ — спектральная плотность сигнала на входе предфильтра; $W(\omega)$ — преобразование Фурье от весовой функции предфильтра.

Итак, требуется определить $W(\omega)$, доставляющее минимум (6) [или $\omega(t)$, минимизирующее (5)].

Можно показать, что оптимальная весовая функция $w(t)$ является решением интегрального уравнения Винера — Хопфа

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta w(\theta)(-\rho^{II}(t-\theta) + \mu^2\rho(t-\theta)) = \mu^2\rho(t); \quad t \geqslant 0, \tag{7}$$

где μ^2 — неопределенный множитель, выбираемый из условия минимума λ. Условие $t \geqslant 0$ означает физическую реализуемость фильтра.

Заметим, что соотношение (7) при условии $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$ является уравнением для оптимального «идеального» фильтра. Прежде всего мы попытаемся получить оценку сверху для эффекта, достигаемого предварительной фильтрацией, вычислив λ для случая, когда используется оптимальный «идеальный» фильтр, т. е. фильтр с передаточной функцией

$$W(\omega) = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \omega^2}, \tag{8}$$

где μ^2 определяется из соотношения

$$\varepsilon^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \mu_0^2} S(\omega)\, d\omega. \tag{9}$$

При этом

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \mu_0. \tag{10}$$

Можно показать, что выигрыш от использования предфильтра с предфильтром (8) для «гладких» сигналов дает незначительный эффект. Так, если

$$\frac{\rho^{IV}(0)}{[\rho^{II}(0)]^2} \ll \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},$$

то, как следует из (9), относительный выигрыш (по сравнению с оптимальной компрессией без предварительной фильтрации) не превосходит

$$\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\rho^{IV}(0)}{[\rho^{II}(0)]^2}\right]^{-1/2}.$$

Так, например, для процесса с корреляционной функцией $\sigma^2 \exp[-(\alpha\tau)^2]$ этот выигрыш не превосходит $\left(1 - 3\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}\right)^{-1/2}$. Ясно поэтому, что предварительная фильтрация гладких сигналов малоэффективна.

Дело обстоит иначе, если входные сигналы «не слишком гладки» (например, недифференцируемые или однократно дифференцируемые в среднеквадратичном процессы). Так, если исходный сигнал есть стационарный марковский гауссовский процесс с корреляционной функцией $\sigma^2 \exp[-\alpha|\tau|]$, из (9) следует, что

$$\mu_0 = \alpha\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} - 1\right) \cong \alpha\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

и в соответствии с (10)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot \frac{\alpha\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (11)$$

Сравнивая (11) с формулой (13) из *, убеждаемся, что введение идеального предфильтра уменьшает среднее число отсчетов на выходе примерно в 4 раза. Этот факт позволяет надеяться, что использование физически осуществимого предфильтра может быть полезным. Действительно, рассмотрим однократно дифференцируемый в среднеквадратичном процесс с корреляционной функцией

$$\frac{\sigma^2}{\beta - \alpha}(\beta \exp[-\alpha|\tau|] - \alpha \exp[-\beta|\tau|]).$$

Для этого процесса решение (7) есть

$$W(\omega) = \frac{\mu^2(\alpha + \beta + \mu + i\omega)}{(\alpha + \mu)(\beta + \mu)(\mu + i\omega)}. \quad (12)$$

При $\beta \to \infty$ из (12) получим выражение для передаточной функции оптимального реального предфильтра для марковского процесса

$$W(\omega) = \frac{\mu^2}{(\alpha + \mu)(\mu + i\omega)} \cong \frac{\mu}{\mu + i\omega}, \quad (13)$$

т. е. очень близким к оптимальному будет RC-фильтр с постоянной времени $RC = \frac{1}{\mu_0}$, где $\mu_0 = 2\frac{\alpha\sigma^2}{\varepsilon^2}$; при этом

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot \frac{2\alpha\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (14)$$

Таким образом, использование оптимального реального предфильтра примерно вдвое уменьшает число отсчетов на выходе компрессора.

Интересно отметить, что как в случае предфильтра (8), так и для предфильтра (13)

$$\frac{q^2_{\text{опт}}}{12} = \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad (15)$$

т. е. половина погрешности приходится на ошибку квантования по уровню, а половина на предфильтр.

2.2. Если на вход предсказателя с фиксированной апертурой, работающего в режиме непрерывного считывания, подается смесь «гладкого» гауссовского сигнала и некоррелированной с сигналом дифференцируемой в среднеквадратичном гауссовской помехи, то справедлива следующая асимптотическая формула для среднего числа отсчетов в единицу времени на выходе компрессора:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\sqrt{\frac{-\sigma^2\rho^{II}(0) - \sigma_y^2\rho_y^{II}(0)}{\varepsilon^2 - \sigma_y^2}}, \quad (16)$$

где $\sigma_0^2\rho(\tau)$ — по-прежнему корреляционная функция сигнала, а $\sigma_y^2\rho_y(\tau)$ — корреляционная функция помехи. Из сравнения (16) с формулой для

* В. М. Ефимов, З. А. Лившиц. Оптимизация систем сжатия, использующих предсказатель с фиксированной апертурой.— Автометрия, 1972, № 4.

среднего числа отсчетов в единицу времени на выходе оптимальной системы без компрессии (см. п. 4.1 в *)

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{-\sigma^2\rho^{II}(0)}{\varepsilon^2 - \sigma_y^2}} \tag{17}$$

можно видеть, что относительный выигрыш от применения компрессора

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{1 + \dfrac{\sigma_y^2\rho_y^{II}(0)}{\sigma^2\rho^{II}(0)}}} \tag{18}$$

существенно зависит от «мобильности» помехи. Содержательный смысл применения предфильтра в этом случае, помимо указанного в предыдущем пункте, состоит в необходимости уменьшения этого эффекта.

Можно показать, что задача нахождения оптимального предфильтра сводится к определению весовой функции $w(t)$, минимизирующей выражение

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \sqrt{\frac{-\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt w(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta w(\theta) \left[\sigma^2\rho^{II}(t-\theta) + \sigma_y^2\rho_y^{II}(t-\theta)\right]}{\varepsilon^2 - \sigma^2\left[1 - 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt w(t)\rho(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt w(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta w(\theta)\rho(t-\theta)\right] - \sigma_y^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt w(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta w(\theta)\rho_y(t-\theta)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \sqrt{\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\omega^2 [S(\omega) + S_y(\omega)] |W(\omega)|^2}{\varepsilon^2 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega S(\omega) |1 - W(\omega)|^2 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega S_y(\omega) |W(\omega)|^2}}. \tag{19}$$

Оптимальная весовая функция $w(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\theta w(\theta) \left[-\sigma^2\rho^{II}(t-\theta) - \sigma_y^2\rho_y^{II}(t-\theta) + \mu^2\sigma^2\rho(t-\theta) + \mu^2\sigma_y^2\rho_y(t-\theta)\right] =$$

$$= \mu^2\sigma^2\rho(t); \qquad t \geqslant 0, \tag{20}$$

где, как и в (7), μ^2 — неопределенный множитель, выбираемый из условия минимума λ.

Как и в предыдущем пункте, рассмотрение оптимального идеального фильтра (т. е. решение (20) без учета условия $t \geqslant 0$) позволяет сделать некоторые полезные выводы. В этом случае

$$W(\omega) = W_1(\omega) W_2(\omega) = \frac{S(\omega)}{S(\omega) + S_y(\omega)} \cdot \frac{\mu^2}{\mu^2 + \omega^2}. \tag{21}$$

Параметр μ^2 определяется из соотношения

$$\varepsilon^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(1 - \frac{S(\omega)}{S(\omega) + S_y(\omega)} \cdot \frac{\mu_0^2}{\mu_0^2 + \omega^2}\right) S(\omega). \tag{22}$$

При этом

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \mu_0.$$

* В. М. Ефимов, З. А. Лившиц. Оптимизация систем сжатия, использующих предсказатель с фиксированной апертурой.— Автометрия, 1972, № 4.

Как следует из (21), оптимальный идеальный фильтр есть суперпозиция двух фильтров: $W_1(\omega)$ — оптимальный идеальный фильтр для подавления помехи; $W_2(\omega)$ — оптимальный идеальный фильтр для сглаживания сигнала на выходе первого фильтра [ср. с (8)].

Заметим теперь, что из «гладкости» полезного сигнала следует, что сигнал на выходе фильтра $W_1(\omega)$ «не менее гладок». Действительно, спектр сигнала на выходе первого фильтра есть

$$S_1(\omega) = S(\omega)\frac{S(\omega)}{S(\omega)+S_y(\omega)} \leqslant S(\omega).$$

Но, как отмечалось в п. 2.1, использование сглаживающих предфильтров для увеличения компрессии гладких сигналов малоэффективно.

Таким образом, предфильтр $W_1(\omega)$ является «близким» к идеальному оптимальному предфильтру. При его использовании

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\sqrt{\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\omega^2 S(\omega)\frac{S(\omega)}{S(\omega)+S_y(\omega)}}{\varepsilon^2 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega S_y(\omega)\frac{S(\omega)}{S(\omega)+S_y(\omega)}}}. \tag{23}$$

Для сравнения (23) с аналогичной характеристикой оптимальной системы без компрессии, в которой использован фильтр $W_1(\omega)$, заметим, что оптимальный шаг квантования по времени τ в ней определяется из уравнения

$$\varepsilon^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega S_y(\omega)\frac{S(\omega)}{S(\omega)+S_y(\omega)} + 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\,(1-\cos\omega\tau)\,S(\omega)\frac{S(\omega)}{S(\omega)+S_y(\omega)} \tag{24}$$

и при высокой точности воспроизведения

$$\lambda_1 = \frac{1}{\tau} \cong \sqrt{\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\omega^2 S(\omega)\frac{S(\omega)}{S(\omega)+S_y(\omega)}}{\varepsilon^2 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega S_y(\omega)\frac{S(\omega)}{S(\omega)+S_y(\omega)}}}. \tag{25}$$

Из (23) и (25) вытекает, что фильтрация помехи фильтром $W_1(\omega)$ на входе компрессора сохраняет преимущество системы, в которой он используется, по сравнению с оптимальной системой без компрессора с тем же фильтром.

Качественно аналогичные результаты, по-видимому, справедливы и при использовании физически осуществимых фильтров, «подавляющих помеху».

3.1. Представляет интерес изучение эффективности применения в многоканальных системах предварительных алгебраических линейных преобразований сигналов. В данной работе этот вопрос подробно не обсуждается; мы ограничимся лишь замечанием, что линейные преобразования, приводящие к декорреляции сигналов, не являются оптимальными. Действительно, рассмотрим двухканальную (для простоты) систему. Исходными являются гауссовские стационарные сигналы с корреляционными функциями $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$, причем положим

$$R_1(\tau) = R_2(\tau) = R(\tau).$$

Относительно взаимно-корреляционной функции предположим, что она является четной функцией аргумента τ, т. е.

$$R_{12}(\tau)=R_{21}(\tau)=R_0(\tau).$$

и

$$\left.\frac{\partial R_0(\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0.$$

Пусть далее сигналы «достаточно гладки» (ср. *), чтобы при их сжатии оптимальным было непрерывное считывание.

Рассмотрим класс линейных преобразований вида

$$Y_1(\tau)=X_1(\tau);\qquad Y_2(\tau)=X_2(\tau)-\beta X_1(\tau). \tag{26}$$

Ясно, что декоррелирующее преобразование является частным случаем (26) при $\beta=R_0(0)/R(0)$.

Предполагается, что воспроизведение исходных сигналов производится так:

$$X_1^*(\tau)=Y_1^*(\tau);\quad X_2^*(\tau)=Y_2^*(\tau)+\beta Y_1^*(\tau), \tag{27}$$

где $Y_i^*(\tau)$ $(i=1,\ 2)$ — восстановленный сигнал на выходе компрессора.

Если заданный средний квадрат погрешности воспроизведения в каждом из каналов равен ε^2, то можно показать, что при $\varepsilon^2/R(0)\ll 1$ среднее число отсчетов на выходе системы в единицу времени

$$\lambda_\Sigma=\lambda_1+\lambda_2=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\sqrt{\frac{-\left.\frac{d^2R(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}}{\varepsilon^2}}\left\{1+\sqrt{\frac{1-2\beta\mu+\beta^2}{1-\beta^2}}\right\}, \tag{28}$$

где

$$\mu=\left.\frac{\partial^2R_0(\tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0}\Big/\left.\frac{d^2R(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}.$$

(Следует отметить, что формулой (28) желательно пользоваться при не слишком малых $1-\mu^2$; это обстоятельство, однако, маловажно для целей этого пункта.) Из (28) следует, что

$$\beta_{\text{опт}}=\frac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \tag{29}$$

и

$$\lambda_\Sigma=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\sqrt{\frac{-\left.\frac{d^2R(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}}{\varepsilon^2}}\{1+(1-\mu^2)^{1/4}\}. \tag{30}$$

Приведенные соотношения являются иллюстрацией замечания, сделанного в начале этого пункта.

Задача нахождения оптимального линейного алгебраического преобразования представляет интерес и в случае, когда снимаются данные о состоянии некоторого случайного поля (например, при считывании полутоновых изображений). Можно показать, что и в этой ситуации декоррелирующее преобразование не является оптимальным.

Поступила в редакцию 21 октября 1972 г.

---

* В. М. Ефимов, З. А. Лившиц. Оптимизация систем сжатия, использующих предсказатель с фиксированной апертурой.— Автометрия, 1972, № 4.