ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.
2. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Советское радио», 1966.
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступило в редакцию 20 декабря 1971 г.

УДК 621.3.01

Г. П. ВЕСЕЛОВА, Ю. И. ГРИБАНОВ
(Москва)

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК МОМЕНТОВ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМОВ

При определении динамических характеристик линейных стационарных систем автоматического управления по неустановившемуся движению отыскивается решение интегрального уравнения

$$\int_0^t k(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = y(t);\ \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Преобразование Лапласа переводит это уравнение в область переменного s, где решение в форме передаточной функции получается в явном виде (начальные условия мы считаем нулевыми)

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \tag{2}$$

Дифференцируя уравнение (2) в точке $s=0$, мы получим соотношения, определяющие моменты импульсной переходной функции

$$\mu_i = \int_0^\infty k(\tau)\, \tau^i\, d\tau = (-1)^i\ \frac{d^i}{ds^i}\,\Phi(s)/_{s=0};\ i = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

через моменты входного и выходного сигналов *:

$$\mu_0 = \frac{a_0}{b_0};\ \ \mu_i = \mu_0\left(\frac{a_i}{a_0} - \frac{b_i}{b_0} - \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j\, \mu_j\, b_{i-j}\right), \tag{4}$$

где

$$a_i = \int_0^T y(t)\, t^i\, dt; \qquad b_i = \int_0^T x(t)\, t^i\, dt. \tag{5}$$

Знание моментов μ_i позволяет получить импульсную переходную функцию в виде разложения по системе ортогональных функций либо, если вид передаточной функции задан, определить неизвестные коэффициенты из соответствующей системы уравнений.

На практике ввиду того, что входной и выходной сигналы фиксируются с ошибками, моменты импульсной переходной функции, рассчитанные по (4), могут значительно отличаться от истинных значений и использование их для получения разложения $k(\tau)$ или коэффициентов передаточной функции приведет к значительным погрешностям в конечном результате.

---

* В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев и др. Ортогональный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов.— В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 8. М., «Машиностроение», 1968.

Очевидно, что с ростом порядка момента точность его определения падает. Посмотрим, какое число моментов μ_i имеет смысл определять и каковы ошибки в оценке моментов. Будем считать, что при измерениях на входной и выходной сигналы накладываются аддитивные шумы $n(t)$ и $m(t)$, которые являются стационарными взаимно некоррелированными случайными процессами:

$$\tilde{y}(t) = y(t) + n(t), \quad \tilde{x}(t) = x(t) + m(t). \tag{6}$$

При этих предположениях моменты входного и выходного сигналов $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$ будут случайными величинами, математическое ожидание и дисперсия которых соответственно равны:

$$M\tilde{a}_i = a_i + \Delta\tilde{a}_i, \quad D\tilde{a}_i = \int_0^T \int_0^T R_n(t_1, t_2)\, t_1^i t_2^i \, dt_1 dt_2; \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

где

$$\Delta\tilde{a}_i = Mn \int_0^T t^i \, dt = \frac{T^{i+1}}{i+1} Mn \tag{8}$$

(аналогичные соотношения справедливы для $\tilde{b}_i$).

Если интервал корреляции шума $\tau_n \ll T$, то формула (7) перейдет в

$$D\tilde{a}_i \approx \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\tau) \int_0^T t^{2i} dt d\tau = \frac{\tau_n T^{2i+1} Dn}{2i+1}; \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

где

$$\tau_n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_n(\tau)\, d\tau}{Dn}.$$

Из формулы (4) следует, что μ_i представляет собой произведение μ_0 и алгебраической суммы ν_i:

$$\nu_i = \frac{\mu_i}{\mu_0} = \frac{a_i}{a_0} - \frac{b_i}{b_0} - \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j \mu_j b_{i-j}. \tag{10}$$

Полагая в первом приближении величины ν_i и μ_0 некоррелированными, получим для дисперсии i-го момента

$$D\tilde{\mu}_i = D(\tilde{\mu}_0 \tilde{\nu}_i) \approx D\tilde{\mu}_0 \nu_i^2 + \mu_0^2 D\tilde{\nu}_i \,. \tag{11}$$

Дисперсия нулевого момента $D\tilde{\mu}_0$ определится через $D\tilde{a}_0$ и $D\tilde{b}_0$:

$$D\tilde{\mu}_0 = D\left(\frac{\tilde{a}_0}{\tilde{b}_0}\right) = \frac{D\tilde{a}_0}{b_0^2} + \frac{\mu_0^2}{b_0^2} D\tilde{b}_0 = \mu_0^2 T \left(\frac{D_n \tau_n}{a_0^2} + \frac{D_m \tau_m}{b_0^2}\right). \tag{12}$$

При вычислении $D\tilde{\nu}_i$ ограничимся рассмотрением ошибок, вносимых первыми двумя членами $\frac{\tilde{a}_i}{\tilde{a}_0}$, $\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{b}_0}$, и получим таким образом оценку снизу:

$$D\tilde{\nu}_i \geqslant D\left(\frac{\tilde{a}_i}{\tilde{a}_0}\right) + D\left(\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{b}_0}\right). \tag{13}$$

Пренебрегая $D\tilde{a}_0$ и $D\tilde{b}_0$, которые относительно малы, из соотношений (9)—(13) получим

$$D\tilde{\mu}_i \geqslant D\tilde{\mu}_0 \left(\frac{\mu_i}{\mu_0}\right)^2 + \frac{T^{2i}}{2i+1} D\tilde{\mu}_0. \tag{14}$$

Относительная погрешность составит

$$\xi_i^2 = \frac{D\tilde{\mu}_i}{\mu_i^2} \geqslant \frac{D\tilde{\mu}_0}{\mu_0^2} + \frac{T^{2i}}{2i+1} \frac{D\tilde{\mu}_0}{\mu_i^2} = \xi_0^2 + \frac{D\tilde{\mu}_0}{\mu_i^2} \frac{T^{2i}}{2i+1}. \tag{15}$$

Для систематического отклонения, если ограничиться в выражении (10) учетом смещений только первых двух членов $\frac{\tilde{a}_i}{\tilde{a}_0}$, $\tilde{b}_i/\tilde{b}_0$ и пренебречь смещением нулевых моментов, которые относительно малы, найдем из формул (7)—(8), (10):

$$\Delta\mu_i \approx \frac{T^{i+1}}{i+1}(Mn + \mu_0 Mm); \tag{16}$$

$$\Delta\rho_i = \frac{\Delta\mu_i}{\mu_i} = \frac{T^{i+1}}{\mu_i\,(i+1)}(Mn + \mu_0 Mm). \tag{17}$$

Из рассмотрения формул (15), (17), можно заключить, что ξ_i и $\Delta\rho_i$ содержат составляющую, которая возрастает пропорционально T^i/μ_i. Моменты типовых импульсных переходных функций возрастают как степени τ_0, где τ_0 — величина, обратная ширине полосы пропускания системы. Например, для $k(\tau) = \tau_0^{-1}\exp(-\tau/\tau_0)$ имеем $\mu_i = i!\,\tau_0^i$. Если $T \gg \tau_0$, то, как видно из выражений (15), (17), с ростом порядка момента погрешность может быстро увеличиваться. Интервал T слагается из длительности выходного сигнала и времени переходного процесса $T = T_x + (3 \div 5)\tau_0$. Если, например, $T = 6\tau_0$, то погрешность будет возрастать в отношении

$$\xi_1 = 4{,}5\xi_0, \qquad \xi_2 = 7\xi_0, \qquad \xi_3 = 15\xi_0 \ldots .$$

На конкретном примере оценим порядок ошибок, которые могут возникать при использовании метода моментов для идентификации систем автоматического управления по записям переходных процессов.

ПРИМЕР

1. Примем, что $k(\tau) = \tau_0^{-1}\exp(-\tau/\tau_0)$, входной сигнал имеет форму прямоугольника длиной T_x. При этом

$$\mu_i = \tau_0^i\, i!;\; a_0 = b_0 = T_x;\; \mu_0 = 1 \tag{18}$$

и формулы (15) и (17) перейдут в

$$\xi_i^2 \geqslant \frac{D\mu_0}{\mu_0^2} + \left(\frac{T}{r_0}\right)^{2i}\frac{D\mu_0}{i!\,(2i+1)} = \xi_0^2\left[1 + \left(\frac{T}{\tau_0}\right)^{2i}\frac{1}{i!\,(2i+1)}\right]; \tag{19}$$

$$\Delta\rho_i \approx \left(\frac{T}{\tau_0}\right)^i \frac{Mn + Mm}{i!\,(i+1)}. \tag{20}$$

Будем считать $Mn = Mm = 0$, $T_x = 6\tau_0$, $T = 10\tau_0$, $\frac{T}{\tau_n} = \frac{T}{\tau_m} = 40$, $\sigma_n = \sigma_m = 10^{-2}$. Из формул (18), (12), (19) получаем:

$$\xi_0^2 = \frac{D\tilde{\mu}_0}{\mu_0^2} = D\tilde{\mu}_0 = 10\tau_0\left[\frac{10^{-4}\tau_0}{4\,(6\tau_0)^2} + \frac{10^{-4}\tau_0}{4\cdot(6\tau_0)^2}\right] = 1{,}4\cdot 10^{-5};$$

$$\xi_1 = 6\xi_0 = 2\%; \qquad \xi_2 = 30\xi_0 = 10\%; \qquad \xi_3 = 15\xi_0 = 50\%.$$

2. При тех же условиях относительно $k(\tau)$ и $x(t)$ рассмотрим влияние постоянной составляющей ошибки фиксации. Положим $Mm = 0$, $Mn = 0{,}2\cdot 10^{-2}$, $T_x = 6\tau_0$, $T = 10\tau_0$. Из соотношения (20) определим: $\Delta\rho_0 = 2\%$; $\Delta\rho_i = \frac{0{,}2\cdot 10^{i-2}}{i!\,(i+1)}$; $\Delta\rho_1 = 5\Delta\rho_0 = 10\%$; $\Delta\rho_2 = 17\Delta\rho_0 = 34\%$; $\Delta\rho_3 = 50\Delta\rho_0 = 100\%$ ...

Выводы

При определении моментов импульсных переходных функций по реализациям переходных процессов могут возникать значительные погрешности, быстро возрастающие с повышением порядка момента. Нередко уже при $i \geqslant 2$ вычисленные моменты не несут полезной информации. Наибольшую погрешность в оценку моментов вносят систематические ошибки фиксации и медленно изменяющиеся помехи.

Поступило в редакцию 26 октября 1970 г.,
окончательный вариант — 18 ноября 1971 г.