УДК 519.272

А. Г. СЕНИН

Длительность временного интервала наблюдения является одним из лимитирующих факторов при распознавании случайных процессов. Хотя увеличение длительности позволяет уменьшить ошибки распознавания, использовать такую возможность в реальных условиях не всегда удается. Поэтому оценка влияния времени наблюдения на качество распознавания представляет определенный практический интерес.

Ограничиваясь анализом стационарных случайных процессов, заметим, что использование оптимальных алгоритмов распознавания, основанных на формировании функционала правдоподобия, в силу их сложности, отсутствия достаточно полной априорной информации в практических ситуациях исключает возможность их применения. В этих условиях задача может быть решена следующим образом.

В течение интервала наблюдения $[0-T]$ по одному и тому же алгоритму для всех процессов формируется система признаков. В выбранном пространстве признаков выделяются области каждого класса, собственные области, попадание в одну из которых наблюдаемого вектора и определяет принадлежность реализации. Учитывая сравнительную техническую простоту аппаратурной реализации, информативность статистического описания сигнала, в особенности для гауссовых процессов, в качестве признаков процесса будем использовать энергетические спектральные свойства, а область каждого класса выделять с помощью элементарных фигур — гиперкубов.

Оценка спектральной плотности процесса $x(t)$ определяется известным соотношением [1]:

$$y(\omega)=\frac{1}{k\Delta t}\sum_{j=1}^{k}\left|\int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt\right|^2,\quad j=1,2,\ldots,k, \tag{1}$$

математическое ожидание этой величины

$$m_y(\omega)=\frac{1}{\pi\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1)\frac{1-\cos(\omega-\omega_1)\Delta t}{(\omega-\omega_1)^2}\,d\omega_1, \tag{2}$$

а дисперсия частотных составляющих, для которых $\Delta t\omega\gg 1$,

$$\sigma_y^2(\omega)=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\pi\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1)\frac{1-\cos(\omega-\omega_1)\Delta t}{(\omega-\omega_1)^2}\,d\omega_1\right)^2. \tag{3}$$

Весь интервал наблюдения T, очевидно, равен

$$T=k\Delta t. \tag{4}$$

Как видно из (2), математическое ожидание оценки (1) определяется сверткой спектральной плотности $S(\omega)$ и весовой функции

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi\Delta t}\frac{1-\cos(\omega-\omega_1)\Delta t}{(\omega-\omega_1)^2}. \tag{5}$$

Характер этой функции для двух разных значений временного интервала Δt показан на рис. 1, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\,d\omega=1. \tag{6}$$

Таким образом, значение Δt определяет ширину полосы или разрешающую способность спектрального анализа.

Если спектральная плотность $S(\omega)$ постоянна в полосе частот, где $f(\omega)$ существенно отлична от нуля, тогда из (2) следует, что

$$m_y(\omega)=S(\omega), \tag{7}$$

а дисперсия оценки

$$\sigma_y^2(\omega)=\frac{1}{k}S^2(\omega). \tag{8}$$

Выявление зависимости ошибок распознавания от числа элементарных участков осреднения k и является темой предлагаемой статьи.

Пусть необходимо распознавать случайный процесс $\mu(t)$ среди неоднородных шумов $\nu(t)$, признаки которых независимы и равномерно распределены в интервале [0—1]. Для процесса $\mu(t)$ составляющие вектора примем равными 0,5. Такая ситуация соответствует отсутствию априорной информации относительно мешающих сигналов $\nu(t)$ и представляет для рассмотрения наибольший практический интерес.

Для определения вероятности правильной классификации необходимо знание законов распределения. Будем полагать, что анализируемые полосы частот не перекрываются, откуда следует некоррелированность признаков.

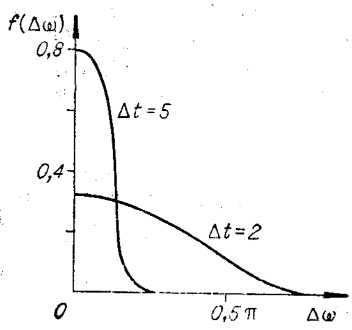

Рис. 1.

Как следует из (1), плотность распределения $y(\omega)$ определяется распределением величины

$$a(\omega) = \frac{1}{\Delta t}\left(\int_0^{\Delta t} x(t)\cos\omega t dt\right)^2 + \frac{1}{\Delta t}\left(\int_a^{\Delta t} x(t)\sin\omega\, t dt\right)^2. \tag{9}$$

Принимая во внимание известное χ^2-распределение [2] и независимость составляющих в (9), плотность вероятности величины $y(\omega)$ можно представить в виде

$$W(y) = \frac{k^k}{2^k\sigma^{2k}\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-\frac{ky}{2\sigma^2}}, \tag{10}$$

где σ^2 — дисперсия случайных величин $\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\int_0^{\Delta t} x(t)\cos\omega t dt$ или $\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\int_0^{\Delta t} x(t)\sin\omega t dt$, равная, очевидно, $S(\omega)/2$. В частности, из (10) следует, что

$$m_y = 2\sigma^2 = S(\omega), \tag{11}$$

а дисперсия

$$\sigma_y^2 = \frac{4\sigma^4}{k} = \frac{S^2(\omega)}{k}. \tag{12}$$

Несложно теперь выразить условную плотность вероятности спектральных признаков, а именно, для процесса $\mu(t)$ имеем

$$W(y/\mu(t)) = \frac{k^k}{0{,}5^k\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-2ky}, \tag{13}$$

для неоднородного фона

$$W(y/\nu(t)) = \frac{k^k y^{k-1}}{2^{k-1}\Gamma(k)}\int_0^{0{,}5}\frac{e^{-\frac{ky}{2\sigma^2}}}{\sigma^{2k}}d\sigma^2 = \frac{k}{\Gamma(k)}\Gamma(k-1,\, ky), \tag{14}$$

где $\Gamma(\alpha,\, y)$ — неполная гамма-функция [3]. Располагая такими априорными данными, решим поставленную задачу.

Выделим собственную область процесса $\mu(t)$ из условия вероятности правильной классификации, равной практически достоверной, т. е.

$$P(\mu(t)) = 0{,}997. \tag{15}$$

Принимая во внимание независимость признаков, одинаковое их распределение, а также и то, что выделяемая область является n-мерным гиперкубом, ориентированным параллельно осям координат, длину каждой грани, очевидно, следует определять из условия вероятности

$$P_n(\mu(t)) = \sqrt[n]{0{,}997}. \tag{16}$$

Тогда качество распознавания будет практически целиком определяться вероятностью ошибок распознавания неоднородного фона. Область каждого класса, как правило, выделяется при обучении, операции, связанной с оценкой параметров разделяющей поверхности. В рассматриваемом случае такими параметрами являются центр гиперкуба и длина его грани 2Δ. Совместим центр гиперкуба с концом вектора математического ожидания признаков $\overline{m}_{y/\mu(t)}$ процесса $\mu(t)$. Тогда, очевидно, уравнение разделяющей поверхности окажется равным

$$\left|\overline{m}_{y|\mu(t)} - \overline{y}\right| = \overline{\Delta}. \tag{17}$$

Используя последнее соотношение, можно определить как длину грани гиперкуба из условия (16), так и вероятность ошибочной классификации неоднородного фона по известному распределению (14). Используя асимптотическое представление неполной Г-функции [2], для больших значений $k>10$

$$W(y|\nu(t)) = 1 - F\left(2\sqrt{ky} - 2\sqrt{k-1}\right), \tag{18}$$

где

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{19}$$

При $k=1$

$$W(y|\nu(t)) = \Gamma(0, y) = -Ei(-y), \tag{20}$$

где $Ei(y)$ — интегральная показательная функция [3]. На рис. 2 отражен характер

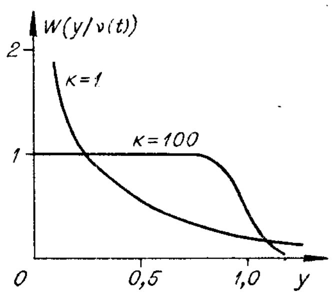

Рис. 2.

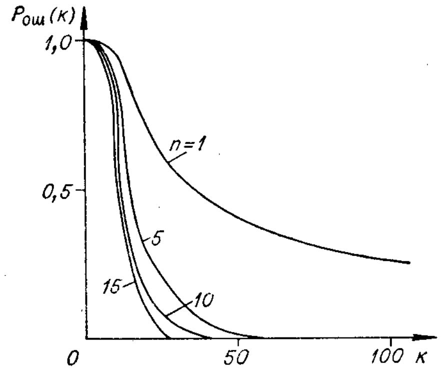

Рис. 3.

этого распределения. Как и следовало ожидать, для больших значений k распределение $W(y|\nu(t))$ приближается к равномерному. Искомая зависимость вероятности ошибок распознавания при разном числе признаков представлена на рис. 3. Помня, что практический интерес объективная классификация представляет, если достигается достаточно надежное распознавание, при числе используемых признаков, равном 10—15, можно рекомендовать число элементарных участков осреднения $k \geqslant 100$.

Если собственная область, выделяемая поверхностью (17), такова, что $P(\mu(t)) \approx 1$, тогда вероятность ошибочного распознавания процесса $\mu(t)$ при большом числе осреднений окажется равной объему выделенной области

$$P_{\text{ош}}(n) = (2\Delta)^n. \tag{21}$$

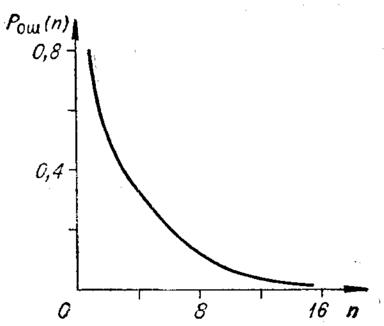

Рис. 4.

Эта зависимость для $k=20$ представлена на рис. 4 и свидетельствует о повышении качества распознавания с увеличением числа признаков.

Как правило, в настоящее время для спектрального анализа используются аналоговые методы, не позволяющие непосредственно реализовать операцию разложения Фурье, согласно (1). Однако благодаря успехам в области цифровых методов обработки информации, в частности разработке алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), можно надеяться на широкое использование дискретной техники для спектрального анализа, возможности которого применительно к задаче распознавания случайных процессов отражены в данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.
2. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Советское радио», 1966.
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступило в редакцию 20 декабря 1971 г.

УДК 621.3.01

Г. П. ВЕСЕЛОВА, Ю. И. ГРИБАНОВ
(Москва)

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК МОМЕНТОВ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМОВ

При определении динамических характеристик линейных стационарных систем автоматического управления по неустановившемуся движению отыскивается решение интегрального уравнения

$$\int_0^t k(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = y(t); \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Преобразование Лапласа переводит это уравнение в область переменного s, где решение в форме передаточной функции получается в явном виде (начальные условия мы считаем нулевыми)

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \tag{2}$$

Дифференцируя уравнение (2) в точке $s=0$, мы получим соотношения, определяющие моменты импульсной переходной функции

$$\mu_i = \int_0^\infty k(\tau)\, \tau^i\, d\tau = (-1)^i\, \frac{d^i}{ds^i}\Phi(s)/_{s=0};\ i = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

через моменты входного и выходного сигналов *:

$$\mu_0 = \frac{a_0}{b_0};\ \mu_i = \mu_0\left(\frac{a_i}{a_0} - \frac{b_i}{b_0} - \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j\, \mu_j\, b_{i-j}\right), \tag{4}$$

где

$$a_i = \int_0^T y(t)\, t^i\, dt; \qquad b_i = \int_0^T x(t)\, t^i\, dt. \tag{5}$$

Знание моментов μ_i позволяет получить импульсную переходную функцию в виде разложения по системе ортогональных функций либо, если вид передаточной функции задан, определить неизвестные коэффициенты из соответствующей системы уравнений.

На практике ввиду того, что входной и выходной сигналы фиксируются с ошибками, моменты импульсной переходной функции, рассчитанные по (4), могут значительно отличаться от истинных значений и использование их для получения разложения $k(\tau)$ или коэффициентов передаточной функции приведет к значительным погрешностям в конечном результате.

---

* В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев и др. Ортогональный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов.— В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 8. М., «Машиностроение», 1968.