УДК 681.3.01

В. П. БУДЯНОВ, А. О. ЕГОРШИН, В. Я. ЦВЕТКОВ

(Новосибирск)

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КОНТУРОМ

Введение. Описанные в [1] вычислительные алгоритмы обработки измерительной информации были использованы при обработке сигналов, регистрируемых в процессе физического эксперимента со взрывающимся проводником [2]. Эквивалентная схема исследуемой модели контура со взрывающимся проводником приведена на рис. 1. При эксперименте емкость C, заряженная до некоторого начального напряжения, разряжалась через подводящие шины (с сопротивлением R и индуктивностью L) на пластину из фольги, которая при протекании по ней тока представляет собой существенно нелинейный элемент $Z_н$, описываемый уравнениями:

$$r = f(Q);$$

$$\frac{dQ}{dt} = ri^2;$$

$$L\frac{di}{dt} = u_з - \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt - (R + Z_н)\,i,$$

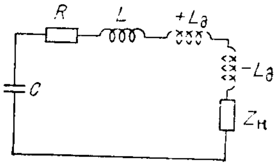

Рис. 1.

где r — активное сопротивление элемента $Z_н$; Q — количество выделенного на нем тепла; $u_з$ — начальное напряжение.

Постановка задачи. Ставится задача получить корректные сглаженные оценки тока в цепи, его интеграла, производной и напряжения на нелинейном элементе, удовлетворяющие уравнениям (1). Сопротивление фольги (его изменение от времени) неизвестно.

Решение. Использование для решения задачи сглаживания дифференциальных уравнений (1) нелинейного контура является аналитически трудно разрешимой задачей. Однако трудности, связанные с учетом нелинейности $Z_н$, можно обойти, считая напряжение на нелинейном элементе источником напряжения, возбуждающим контур, а напряжение на конденсаторе — выходным сигналом:

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt - u_з + Ri + L\frac{di}{dt} + u = 0.$$

В экспериментах возможны измерения следующих сигналов: напряжения на конденсаторе $x = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt - u_з$; напряжения на фольге u; тока $y = C\frac{dx}{dt}$; производной тока $z = C\frac{d^2x}{dt^2}$. Результатами измерений являются совокупности равноотстоящих отсчетов сигналов. Векторы этих отсчетов обозначим соответствующими прописными символами: X, U, Y, Z, а сглаженные реализации — $\widetilde{X}$, $\widetilde{U}$, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Z}$, причем вектор X имеет размерность N, а остальные — $N-2$.

Используя подход, предложенный в [1], дискретное описание объекта можно представить в виде

$$A^{*\mathrm{T}}\widetilde{s} = 0, \qquad (2)$$

где

$$A^{*\mathrm{T}} = \left|A_x^{*\mathrm{T}} \,\vdots\, A_u^{*\mathrm{T}}\right|; \quad \widetilde{s}^{\mathrm{T}} = \left|\widetilde{x}^{\mathrm{T}} \,\vdots\, \widetilde{U}^{\mathrm{T}}\right|.$$

Здесь, в свою очередь,

$$A_y^* = \sum_{i=0}^{n} a_i^* D_{yi}; \quad A_x^* = -\sum_{i=0}^{m} b_i^* D_{xi},$$

где D_{yi} и D_{xi} — прямоугольные матрицы скользящего вектора [1]. Обозначим p размерность образующего вектора. Тогда $p=3$ для матриц D_{xi} и $p=1$ для матриц D_u. Дискретное описание рассматриваемого контура будет представлять собой частный случай уравнения (2):

$$A^{\mathrm{T}}\widetilde{x} + \widetilde{U} = 0. \qquad (3)$$

Здесь

$$A = D_{x0} + RD_{x1} + LD_{x2},$$

где

$$D^{\mathrm{T}}_{x0} = |0 \,\vdots\, E \,\vdots\, 0|; \quad D^{\mathrm{T}}_{x1} = \frac{C}{2h}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad D^{\mathrm{T}}_{x2} = \frac{C}{h^2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

h — шаг дискретизации. Минимизируется функционал

$$J = \alpha_1 (U - \widetilde{U})^{\mathrm{T}} (U - \widetilde{U}) + \alpha_2 (X - \widetilde{X})^{\mathrm{T}} (X - \widetilde{X}) + \alpha_3 (Y - \widetilde{Y})^{\mathrm{T}} (Y - \widetilde{Y}) + \\ + \alpha_4 (Z - \widetilde{Z})^{\mathrm{T}} (Z - \widetilde{Z}) \qquad (4)$$

при условии (3) (α_1, α_2, α_3, α_4 — весовые коэффициенты). Поскольку U может быть получено из (3) в явном виде, то минимум функционала (4) может быть найден без использования множителей Лагранжа. Подставляя (3) в (4), дифференцируя полученное выражение по $\widetilde{X}$ и приравнивая его нулю, получим

$$(G + \alpha_1 A^{\mathrm{T}} A)\, \widetilde{X} = (f - \alpha_1 AX), \qquad (5)$$

где

$$G = \alpha_2 D^{\mathrm{T}}_{x0} D_{x0} + \alpha_3 D^{\mathrm{T}}_{x1} D_{x1} + \alpha_4 D^{\mathrm{T}}_{x2} D_{x2};$$
$$f = \alpha_2 D_{x0} X + \alpha_3 D_{x1} Y + \alpha_4 D_{x2} Z, \qquad (6)$$

откуда

$$\widetilde{X} = (G + \alpha_1 A^{\mathrm{T}} A)^{-1} (f - \alpha_1 AX). \qquad (7)$$

Сглаженные значения остальных сигналов получаются из (3) и формул численного дифференцирования, использованных при дискретизации описания контура:

$$\widetilde{U} = -A^{\mathrm{T}} \widetilde{X}; \qquad (8)$$

$$\widetilde{Y} = D^{\mathrm{T}}_1 \widetilde{X}; \qquad (9)$$

$$\widetilde{Z} = D^{\mathrm{T}}_2 \widetilde{X}. \qquad (10)$$

Обращение матрицы. Для нахождения сглаженных значений $\widetilde{X}$ необходимо решать систему алгебраических уравнений (5). Такая проблема возникает всегда при решении задач сглаживания с учетом динамики процессов, а также во многих других случаях. Когда обрабатываются сигналы с большим количеством отсчетов, использование стандартной программы для обращения симметричной матрицы требует использования большого объема памяти $\frac{N(N+3)}{2}$, что делает невозможным реализацию алгоритма на машинах средней мощности. Был разработан специальный алгоритм для выполнения операции $c = B_N^{-1} z$, когда B — ленточная ганкелевая матрица размерности $N \times N$. Так названа матрица вида

$$B_N = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_p & & & 0 \\ b_2 & \ddots & & & \ddots & & b_p \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ b_p & & & \ddots & & & \\ & \ddots & & & & & b_2 \\ 0 & & & b_p & \dots & b_2 & b_1 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Образующим вектором ее является вектор b размерности p:

$$b^{\mathrm{T}} = |b_1 b_2 \dots b_p|.$$

Алгоритм обращения матрицы основан на использовании формулы Фробениуса, а также того факта, что матрица B_N при любом N является симметричной относительно обеих диагоналей. Вектор c вычисляется рекуррентно с помощью последовательного применения формулы Фробениуса (см. приложение). Матрица, обращаемая в формуле (6), не является точно ганкелевой: углы (размерности 2×2) на главной диагонали нарушают эту «ганкелевость». Такая матрица может быть обращена с помощью известной формулы [3, 4]:

$$(B+FLF^{\text{т}})^{-1}=B^{-1}-B^{-1}F(F^{\text{т}}B^{-1}F+L^{-1})^{-1}F^{\text{т}}B.$$

Для обращения матрицы B используется описанная выше процедура.

Моделирование на ЦВМ. Исследуемый алгоритм моделировался на ЭВМ «Минск-22». Колебательный контур (см. рис. 1) был взят со следующими параметрами: $C=2{,}6\cdot 10^{-6}$ Ф; $u_з=2\cdot 10^4$ B; $L=30\cdot 10^{-6}$ Гн; $R=5\cdot 10^{-4}$ Ом. Числовые данные соответствуют параметрам реального контура. При таких значениях параметров контура обращаемая матрица оказалась слабо обусловленной (контур сильно колебательный, на границе устойчивости) и ее обращение из-за недостаточной точности ЭВМ делалось с большой погрешностью. Вследствие этого в расчетные формулы была добавлена дополнительная индуктивность (см. $+L_д$ на рис. 1). Из полученного затем сглаженного значения напряжения $\tilde{U}$ вычиталась величина $L_д\tilde{Y}$. Это позволило получить устойчивое обращение матрицы и удовлетворительное сглаживание исходных сигналов (рис. 2). На рисунке приведены графики: идеального сигнала $X_и$ (интеграл тока в контуре в отсутствие помех), измеряемого сигнала X (при наличии помех) и сглаженного сигнала $\tilde{X}$.

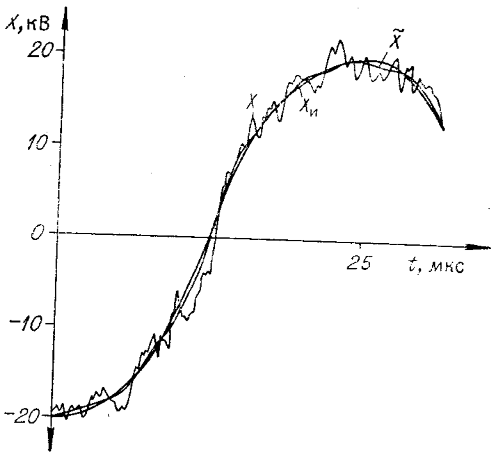

Рис. 2.

Алгоритм сохраняет работоспособность, если обрабатываются (вводятся в ЦВМ) не четыре исходных массива X, U, Y, Z, а только массив X.

Авторы признательны А. М. Искольдскому за постановку задачи и полезные обсуждения.

Приложение

Процедура ЛЕНТА (b, z, c); {**массив** g, $f[1:N]$; **целый** i, k, r; **веществ** a; $a:=1/b[1]$; $f[2]:=-1$; $f[1]:=b[2]\times a$; $c[1]:=a\times z[1]$; $a:=a/(1-f[1]\uparrow 2)$; $c[2]:=a\times(z[2]-z[1]\times f[1])$; $c[1]:=c[1]-c[2]\times f[1]$; **для** $k:=3,\ldots,N$ **цикл** {**для** $i:=1,\ldots,k-1$ **цикл** $g[i]:=f[i]$; $f[k]:=-1$; $f[1]:=0$; **если** $k\leqslant p-1$ **то** $r:=k$ **иначе** $r:=p$; **для** $i:=2,\ldots,r$ **цикл** $f[1]:=f[1]-b[i]\times g[i-1]$; $f[1]:=f[1]\times a$; **для** $i:=2,\ldots,k-1$ **цикл** $f[i]:=g[i-1]-f[1]\times g[k-i]$; $a:=a/(1-f[1]\uparrow 2)$; $c[k]:=z[k]$; **для** $i:=1,\ldots,k-1$ **цикл** $c[k]:=c[k]-f[i]\times z[i]$; $c[k]:=c[k]\times a$; **для** $i:=1,\ldots,k-1$ **цикл** $c[i]:=c[i]-c[k]\times f[k]$}};

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Будянов, А. О. Егоршин. Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ.— Автометрия, 1973, № 1.
2. В. М. Александров, А. П. Байков, В. А. Иванов, А. А. Нестеров. Оптимизация процессов в нелинейном RCL-генераторе с емкостной нагрузкой.— Автометрия, 1973, № 1.
3. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
4. С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968.

Поступило в редакцию 15 сентября 1972 г.