Отсюда

$$\hat{g}^{(n)}(0) = -\frac{w(0)}{2} \pm \sqrt{\frac{w(0)^2}{4} + \sum_{k=0}^{n-1} w^{(n-k)}(0)\,\hat{g}^{(k)}(0)}.$$

Условие единственности, приведенное выше, означает положительность производных $w^s(0) > 0$, или, что то же самое, положительность обратного преобразования Фурье функции w. Таким образом, мы требуем, чтобы функция w служила преобразованием Фурье некоторой положительной последовательности из l^1. По известной теореме Бохнера [3] для этого необходимо и достаточно, чтобы w была положительно определенной функцией на окружности. Это означает, что для любого набора точек $e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}$ на окружности и любых комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$

$$\sum_{k,l=1}^{n} z_k \bar{z}_l w\left(e^{i(\varphi_k - \varphi_l)}\right) \geqslant 0,$$

или, возвращаясь к прежним обозначениям:

$$\sum_{k,l=1}^{n} z_k \bar{z}_l \frac{\sum_{s=0}^{\infty} u_s e^{i(\varphi_k - \varphi_l)}}{\sum_{s=0}^{\infty} v_s e^{i(\varphi_k - \varphi_l)}} \geqslant 0.$$

Представляет интерес способ конструктивной проверки условия единственности положительного решения уравнения (10). Найдя функцию $g = k_1 * \varphi$ и решая интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, получим искомое ядро k_1. Если φ определена, как в (6), то k_1 можно найти из условия

$$g'(x) = k_1(x) - k_1(x - \tau).$$

Функцию k_2 можно определить теперь, например, из (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Дробышев. Оптимизация систем сбора и обработки информации. Реферат докт. дисс. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1970.
2. Ю. И. Худак. Об одной нелинейной задаче автоматического регулирования.— В сб. «Вычислительные методы и программирование». М., Изд-во МГУ, 1970.
3. W. Rudin. Fourier analysis on groups. Int., N. Y., 1962.

Поступила в редакцию 20 сентября 1972 г.

УДК 62—50

В. П. БУДЯНОВ, А. О. ЕГОРШИН

(Новосибирск)

СГЛАЖИВАНИЕ СИГНАЛОВ И ОЦЕНИВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПОМОЩЬЮ ЦВМ

Введение. Автоматическая обработка измерительной информации с помощью ЦВМ является неотъемлемой частью функционирования сложных систем управления, систем автоматизированного контроля, систем автоматизации научных экспериментов. Одна из основных задач обработки измерительной информации в таких системах — выделение полезных сигналов на фоне помех и погрешностей измерений. Эта задача называется в дальнейшем задачей сглаживания. Конечной целью автоматической обработки данных измерений является получение оценок параметров, характеризующих состояние или режим работы управляемой, контролируемой или исследуемой системы. Эта задача называется в дальнейшем задачей идентификации.

Постановка задачи. Решение задачи сглаживания осуществимо лишь при наличии априорной модели восстанавливаемого сигнала. Классический подход использует аппроксимацию сигнала линейной комбинацией заданных функций. Такая модель сигнала обычно не отражает его физическую структуру. Более физичен подход Р. Калмэна [1—3]. Однако используемый в этом подходе аппарат не позволяет непосредственно решить задачу идентификации: параметры динамической системы, моделирующей восстанавливаемый сигнал, должны быть заданы.

В данной работе излагается решение задачи сглаживания и одновременного нахождения оценок параметров динамической системы.

Предлагаемый подход [4] позволяет решить задачу идентификации в той постановке, которая возникает при построении аналитических самонастраивающихся систем управления: по данным измерений сигналов на входе и выходе управляемого объекта получить оценки параметров этого объекта.

Задачи сглаживания и идентификации решаются применительно к динамическим звеньям (объектам) следующего вида:

$$y^{*(0)}(t)+\sum_{i=1}^{n} a_i^* y^{*(i)}(t)-\sum_{i=0}^{m} b_i^* x^{*(i)}(t)=0\,, \qquad (1)$$

где x^* — входной, а y^* — выходной сигнал объекта. Совокупности равноотстоящих моментов времени, в которые осуществляются измерения, ставятся в соответствие векторы отсчетов переменных, входящих в уравнение объекта. Эти векторы обозначаются соответствующими прописными символами и называются реализациями. Различаются истинные (*), измеренные и сглаженные ($\sim$) реализации, например

$$Y^{(i)*},\ X^{(j)*};\ \ Y^{(i)},\ X^{(j)};\ \ \widetilde{Y}^{(i)},\ \widetilde{X}^{(j)}\quad \left(i=\overline{0,n},\quad j=\overline{0,m}\right).$$

Совокупность реализаций $Y^{(i)*}$, $X^{(j)*}$ $\left(i=\overline{0,n},\ \ j=\overline{0,m}\right)$, входящих в описание объекта (1), обозначается через S^*. Совокупность реализаций измеряемых переменных обозначается через z.

Ставятся задачи: по данным измерений z найти оценки $\widetilde{S}$ реализаций S^* (сглаживание); если параметры объекта неизвестны, найти наилучшие, в смысле используемого квадратичного критерия близости измеренных и сглаженных реализаций, оценки этих параметров (идентификация). Предполагается, что

$$z=z^*+\Xi, \qquad (2)$$

где Ξ — вектор некоррелированных гауссовых помех и погрешностей измерений.

Общее решение. Описание объекта (1) обусловливает определенные соотношения между истинными реализациями сигналов их производных. Таким же соотношениям подчиняются и сглаженные реализации. Эти соотношения записываются в виде:

$$\widetilde{Y}^{(0)}+\sum_{i=1}^{n} a_i^* \widetilde{Y}^{(i)}-\sum_{i=0}^{m} b_i^* \widetilde{X}^{(i)}=0; \qquad (3)$$

$$\tilde{Y}^{(i)} = D_{iy}^T \tilde{Y} \quad (i=\overline{0,n}), \quad \tilde{X}^{(i)} = D_{xi}^T \tilde{X} \quad (i=\overline{0,m}), \tag{4}$$

где $\tilde{Y}, \tilde{X}$ — некоторые новые, так называемые основные переменные. Матрицы D_{yi} и D_{xi} в соотношениях (4) — прямоугольные матрицы специального вида: матрицы скользящего вектора. Так названа матрица, имеющая следующую структуру: 1) количество строк больше количества столбцов на некоторое число p, 2) элементы матрицы, не лежащие на главных диагоналях (число этих диагоналей равно $p+1$), равны нулю, 3) элементы, принадлежащие одной диагонали, равны между собой. Для матриц $D_{xi}\,(i=\overline{0,m})$ $p=m$, для матриц $D_{yi}\,(i=\overline{0,n})$ $p=n$. Таким образом, матрица скользящего вектора определяется вектором размерности $p+1$, который называется образующим вектором. Компоненты образующих векторов матриц D_{yi} и D_{xi} суть коэффициенты формул численного дифференцирования.

Подставляя (4) в (3), получим

$$A_y^{*T} \tilde{Y} + A_x^{*T} \tilde{X} = 0.$$

Обозначим $\tilde{s}^T = |\tilde{Y}^T \vdots \tilde{X}^T|$ реализацию основных переменных. Будем иметь, что

$$A^{*T} \tilde{s} = 0.$$

Здесь

$$A_y^* = D_{y0} + \sum_{i=1}^{n} a_i^* D_{yi}, \quad A_x^* = -\sum_{i=0}^{m} b_i^* D_{xi}, \tag{5}$$

а

$$A^{T*} = |A_y^{*T} \vdots A_x^{*T}|. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что матрицы A_y^* и A_x^*, определяемые формулами (6), также являются матрицами скользящего вектора. Компоненты образующих векторов α_y^* и α_x^* этих матриц являются коэффициентами рекуррентного дискретного описания объекта. Между вектором параметров $\alpha^{*T} = |\alpha_y^{*T} \vdots \alpha_x^{*T}|$ дискретного описания и вектором параметров $\beta^{*T} = |1, a^*, \ldots, a_n^*, \ldots, b_m^*|$ дифференциального уравнения связь взаимно однозначная. Она имеет вид

$$\alpha = T\beta, \tag{7}$$

где T — известная квадратная неособенная матрица, определяемая образующими векторами матриц D_{yi}, D_{xj} $(i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m})$:

$$T = \left|\begin{array}{c:c} d_{y0}\ \ldots\ d_{yn} & 0 \\ \hdashline 0 & d_{x0}\ \ldots\ d_{xm} \end{array}\right|.$$

В дальнейшем будем иметь в виду только дискретное описание объекта. Например:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{yi}^* y^*(k-1+i) + \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{xi}^* x(k-1+i) = 0, \quad k=\overline{1, N-n}, \tag{8}$$

где N — число обрабатываемых отсчетов. В качестве аргумента в уравнении (8) указывается дискретное время (номер отсчета).

Связь между измеряемыми переменными z^* и переменными совокупности S^* предполагается линейной. С помощью соотношений (4) и равенства (2) эту связь можно записать следующим образом:

$$z = Hs^* + \Xi. \tag{9}$$

Матрица H в соотношении (9) определяет структуру данной линейной системы наблюдения. Задача сглаживания решается минимизацией квадратичного функционала

$$J(\tilde{s}) = \|z - H\tilde{s}\|_{R^{-1}} \qquad (10)$$

при условиии (5). Здесь R — диагональная матрица, определяющая норму в пространстве измерений R, которому принадлежит вектор z, в соответствии с предполагаемыми дисперсиями помех Ξ. Решение задачи сглаживания имеет вид

$$\tilde{s} = [E - K^{-1}A^* (A^{*T}K^{-1}A^*)^{-1} A^{*T}] K^{-1}H^TR^{-1}z, \qquad (11)$$

где $K=H^TR^{-1}H$. Элементы совокупности $\tilde{S}$ определяются теперь с помощью формул (4). Необходимость обращаемости матрицы K обусловливает требования к структуре системы наблюдения, т. е. к матрице H. Для обращаемости матрицы $A^{*T}K^{-1}A^*$ матрица A^* должна иметь максимальный ранг. Для устойчивых динамических звеньев это имеет место.

Подставляя (11) в (10), получаем выражение для минимума функционала (10) по $\tilde{S}$ при наличии ограничения (5):

$$I_0(\alpha^*) = \min_{A^{*T}\tilde{s}=0} \tilde{I}(\tilde{s}) = \min_{A^{*T}\tilde{s}=0} \|z - H\tilde{s}\|_{R^{-1}} = z^T [E - R^{-1}H(E -$$

$$- K^{-1}A^* (A^{*T}K^{-1}A^*)^{-1} A^{*T}) K^{-1}H^T] R^{-1}z. \qquad (12)$$

Теперь мы можем сформулировать решение задачи идентификации. Величина I_0 есть соответствующее «расстояние» от точки $z\in R$ до подпространства $A_1^*\in H\in R$, где H — подпространство, натянутое на векторы-столбцы матрицы H, а A_1^* — подпространство в H, ортогональное подпространству $A^*\in H$, натянутому на векторы-столбцы матрицы A^*. Подпространство $A_\perp^*$ определяется вектором параметров системы α^* ($A^*=A(\alpha^*)$), и, следовательно, I_0^* также есть функция этих параметров: $I_0^* = I_0(\alpha^*)$. Задача идентификации решается минимизацией функционала

$$I_0(\tilde{\alpha}) = \min_{A^T\tilde{s}=0} I(\tilde{s}) = \min_{A^T\tilde{s}=0} \|z - H\tilde{s}\|_{R^{-1}} = z^T \left[E - R^{-1}H\left(E -\right.\right.$$

$$\left.\left.- K^{-1}\tilde{A}\left(\tilde{A}^TK^{-1}\tilde{A}\right)^{-1}\tilde{A}^T\right) K^{-1}H^T\right] R^{-1}z. \qquad (13)$$

Итак, задача сглаживания решается проектированием вектора измерений на фиксированное подпространство $A_\perp$, определяемое параметрами объекта. Задача идентификации решается варьированием самого подпространства $A_\perp$ так, чтобы минимизировать находимое с помощью проектирования «расстояние» от точки $z\in R$ до подпространства $A_\perp\in H\in R$.

Система с одним входом и одним выходом. Представляет интерес весьма важный частный случай, когда наблюдаются только реализации X и Y. В этом случае $z=s$ и H — единичная матрица. Решение задачи сглаживания имеет вид

$$\tilde{s} = \tilde{z} = [E - RA^* (A^{*T}RA^*)^{-1} A^{*T}] z. \qquad (14)$$

Решение задачи идентификации дается в этом случае минимизацией функционала более простого, чем (13):

$$I_0(\tilde{\alpha}) = z^T\tilde{A}\left(\tilde{A}^TR\tilde{A}\right)^{-1}\tilde{A}^Tz. \qquad (15)$$

Можно показать [4], пользуясь тем, что матрица $\widetilde{A}$ есть матрица скользящего вектора, что

$$\frac{\partial J(\widetilde{\alpha})}{\partial \widetilde{\alpha}} = 2\left[Z^T\left(\widetilde{A}^T R \widetilde{A}\right)^{-1} Z - \Lambda^T R \Lambda\right] \widetilde{\alpha},$$

где Z — матрица, строки которой есть скользящие выборки отсчетов, входящие в уравнение (8), а Λ — матрица скользящего вектора, образующим вектором которой является вектор множителей Лагранжа задачи условной минимизации (10), (5):

$$\lambda = \left(\widetilde{A}^T R \widetilde{A}\right)^{-1} \widetilde{A}^T z.$$

Нетривиальное решение уравнения

$$[Z^T(ARA)^{-1}Z - \Lambda^T R \Lambda]\alpha = 0 \tag{16}$$

может быть найдено с помощью метода последовательных приближений. Эксперименты на ЦВМ показали, что весьма эффективной является следующая итерационная процедура:

$$\alpha_{(k)} = [Z^T(A^T(\alpha_{(k-1)}) RA(\alpha_{(k-1)}))^{-1} Z]^{-1} \alpha_{(k-1)}. \tag{17}$$

При нормальном шуме со среднеквадратичным отклонением до 20% от уровня сигнала итерационная процедура (17) в случае объекта 2-го порядка приводит к требуемому решению уравнения (16) за 5—6 шагов из любой начальной точки пространства параметров.

Дискретный фильтр. Основные трудности при реализации вычислительной обработки данных измерений в соответствии с предложенным выше подходом связаны с необходимостью обращения матриц большой размерности. В указанном выше частном случае, когда наблюдаются только входной и выходной сигналы объекта, а не их производные, и при стационарных помехах эти трудности могут быть преодолены с помощью организации рекуррентных вычислений. Эта возможность связана здесь со специальным видом обращаемой матрицы $A^T RA$. Поскольку матрица A является матрицей скользящего вектора, то $A^T RA$ является симметричной ганкелевой матрицей, у которой только $2p+1$ центральные диагонали отличны от нуля (ленточная матрица). Разработана эффективная рекуррентная процедура для обращения матрицы такого вида. Обработка выборки в 200 отсчетов на ЦВМ «Минск-22М» по формуле (14) длится с использованием этой процедуры около 30 с. Эффективность указанной рекуррентной процедуры связана с использованием с помощью формулы Фробениуса [5] последовательного повышения порядка обращаемой матрицы, а также того факта, что матрица $(A^T RA)^{-1}$ является симметричной относительно обеих диагоналей. Такая вычислительная процедура, реализуемая на ЦВМ в реальном времени, в темпе поступления отсчетов сигналов, является реализацией динамического дискретного фильтра, осуществляющего сглаживание пропущенных через него сигналов в соответствии с критерием (10) и условием (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Kalman. New Approach to the Linear Filtering and Prediction Theory ASME.— J. Basie Engng., 1960, 82, № 1.
2. R. E. Kalman and R. H. Busy. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory Trans. ASME.— J. Basie Engng., 1961, 83, № 1.
3. Р. Ли. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., «Наука», 1966.
4. А. О. Егоршин. Вычислительные замкнутые методы идентификации линейных объектов.— В сб. «Оптимальные и самонастраивающиеся системы». Новосибирск, 1971.
5. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию 8 сентября 1972 г.