УДК 517.948.33

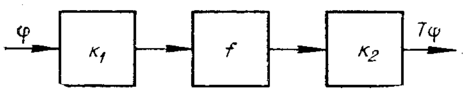
М. Л. АГРАНОВСКИЙ, Р. Д. БАГЛАЙ

(Новосибирск)

О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ, СОДЕРЖАЩИХ НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

В настоящей работе дано решение задачи идентификации характеристик математической модели для специального вида нелинейных объектов, состоящих из двух линейных инерционных звеньев, разделенных нелинейным безынерционным звеном. Исходная информация — результаты измерений сигнала на входе и выходе объекта.

Задача идентификации объекта, состоящего из одного линейного инерционного и одного нелинейного безынерционного звеньев, решалась в [1,2]. Примером физических объектов, которые приводят к указанной нами постановке, являются мощные микроприборы, выпускаемые промышленностью. Структурная схема объекта представлена на рисунке.



Здесь k_1, k_2 — искомые импульсные переходные функции инерционных линейных звеньев, или, что то же, ядра интегральных операторов; f — неизвестная характеристика безынерционного нелинейного звена; φ, $T(\varphi)$ — соответственно входной и выходной сигналы. Задача идентификации решается в предположении, что звенья эквивалентной схемы не нагружают друг друга.

Предполагаем, что абсолютно интегрируемые функции k_1, k_2 спектрально полны, т. е. преобразования Фурье $\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$ нигде не обращаются в нуль, и вещественная достаточно гладкая функция f не является линейной. Таким образом, имеем нелинейный оператор T, действующий в пространстве ограниченных измеримых функций, заданных на $(-\infty, \infty)$: $T(\varphi) = k_2 * f\,(k_1 * \varphi)$. Примем также, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_1(x)\,dx = c_1 \neq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_2(x)\,dx = c_2 \neq 0$. По измеренным значениям оператора T, являющегося суперпозицией трех операторов, требуется определить операторы, входящие в суперпозицию, т. е. определить функции k_1, k_2, f на возможно более узком классе входных сигналов.

Стационарный режим. Выберем в качестве входного постоянный сигнал $\varphi_\beta(t) \equiv \beta$. В стационарном режиме $T(\varphi_\beta) = c_2 f(c_1\beta)$. Функция f определяется с точностью до констант c_1, c_2, а для ядер k_1, k_2, нормированных условием $c_1 = c_2 = 1$, f определяется однозначно. Константы c_1, c_2, если они априори неизвестны, будем в дальнейшем относить к нелинейной характеристике, иначе говоря, будем предполагать ядра k_1, k_2 нормированными.

Для определения функций k_1, k_2 рассмотрим трехпараметрическое семейство входных сигналов

$$\varphi_\omega^{\alpha,\beta}(t) = \alpha \sin \omega t + \beta; \quad -\infty < \alpha,\ \beta < \infty; \quad 0 < \omega < \infty.$$

Тогда

$$T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta}\right) = k_2 * f\left(\alpha k_1 * \varphi_\omega^{1,0} + \beta\right).$$

Дифференцируя выходные данные $T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta}\right)$ по параметру α в точке $\alpha=0$, получим:

$$\left.\frac{\partial T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta}\right)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=f'(\beta)\left(k_2*k_1*\varphi_\omega^{1,0}\right);\qquad \left.\frac{\partial^2 T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta}\right)}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}=f''(\beta)\left(k_2*\left(k_1*\varphi_\omega^{1,0}\right)^2\right).$$

Выбирая точки β_1, β_2, в которых $f'(\beta_1)\neq 0$, $f''(\beta_2)\neq 0$, и учитывая, что

$$\left(k_2*k_1*\varphi_\omega^{1,0}\right)(t)=|\hat{k}_1(\omega)|\,|\hat{k}_2(\omega)|\sin\left(\omega t+\alpha_1(\omega)+\alpha_2(\omega)\right),$$

$$\left(k_2*\left(k_1*\varphi_\omega^{1,0}\right)^2\right)(t)=\frac{1}{2}|\hat{k}_1(\omega)|^2-\frac{1}{2}|\hat{k}_1(\omega)|^2\times$$

$$\times|\hat{k}_2(2\omega)|\cos\left(2\omega t+2\alpha_1(\omega)+\alpha_2(2\alpha)\right),$$

где $\alpha_1(\omega)=\arg\hat{k}_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)=\arg\hat{k}_2(\omega)$, получим

$$|\hat{k}_1(\omega)|\,|\hat{k}_2(\omega)|\sin\left(\omega t+\alpha_1(\omega)+\alpha_2(\omega)\right)=\frac{1}{f'(\beta_1)}\left.\frac{\partial T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta_1}\right)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}(t);\tag{1}$$

$$\frac{1}{2}|\hat{k}_1(\omega)|^2-\frac{1}{2}|\hat{k}_1(\omega)|^2|\hat{k}_2(2\omega)|\cos\left(2\omega t+2\alpha_1(\omega)+\alpha_2(2\omega)\right)=$$

$$=\frac{1}{f''(\beta_2)}\left.\frac{\partial^2 T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta_2}\right)}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}(t).\tag{2}$$

Из (1), (2) находим модули преобразований Фурье искомых ядер k_1, k_2:

$$|\hat{k}_1(\omega)|=\left[\frac{\omega}{f''(\beta_2)\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left.\frac{\partial^2 T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta_2}\right)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}(t)\,dt\right]^{1/2};$$

$$|\hat{k}_2(\omega)|=\frac{\omega}{2\pi|\hat{k}_1(\omega)|\,|f'(\beta_1)|}\left[\left(\int_0^{2\pi/\omega}\left.\frac{\partial T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta_1}\right)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}(t)\sin\omega t\,dt\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^{2\pi/\omega}\left.\frac{\partial T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta_1}\right)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}(t)\cos\omega t\,dt\right)^2\right]^{1/2}.$$

Для определения функций $\alpha_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$ воспользуемся следующим соотношением, вытекающим из (1), (2):

$$\alpha_1(\omega)+\alpha_2(\omega)=$$

$$=\operatorname{arctg}\left[\int_0^{2\pi/\omega}\left.\frac{\partial T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta_1}\right)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}(t)\cos\omega t\,dt\Bigg/\int_0^{2\pi/\omega}\left.\frac{\partial T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta_1}\right)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}(t)\sin\omega t\,dt\right];\tag{3}$$

$$2\alpha_1(\omega)+\alpha_2(2\omega)=$$

$$=-\operatorname{arctg}\left[\int_0^{2\pi/\omega}\left.\frac{\partial^2 T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta_2}\right)}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}(t)\sin 2\omega t\,dt\Bigg/\int_0^{2\pi/\omega}\left.\frac{\partial^2 T\left(\varphi_\omega^{\alpha,\beta_2}\right)}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}(t)\cos 2\omega t\,dt\right].\tag{4}$$

Обозначим правые части в (3), (4) соответственно через $u_1(\omega)$, $u_2(\omega)$. Из (3), (4) получаем функциональное уравнение для определения функции $\alpha_2(\omega)$:

$$\alpha_2(2\omega)-2\alpha_1(\omega)=u_2(\omega)-2u_1(\omega).$$

Решение этого уравнения дается следующим рядом:

$$\alpha_2(\omega) = -u_2(0) - 2u_1(0) + c\omega + \sum_{s=0}^{\infty} 2^s \left[u_2\left(\frac{\omega}{2^{s+1}}\right) - \right.$$

$$\left. - 2u_1\left(\frac{\omega}{2^{s+1}}\right) - u_2(0) + 2u_1(0) \right], \tag{5}$$

где c — произвольная вещественная константа. Сходимость ряда (5) гарантируется существованием у функции $u_2 - 2u_1$ непрерывной второй производной в окрестности нуля.

Аргумент функции $\hat{k}_1$ определяется из (3):

$$\alpha_1(\omega) = u_1(\omega) - \alpha_2(\omega).$$

Таким образом, мы нашли преобразования Фурье искомых ядер:

$$\hat{k}_1(\omega) = |\hat{k}_1(\omega)| \, e^{i(\alpha_1(\omega)+c\omega)}, \quad \hat{k}_2(\omega) = |\hat{k}_2(\omega)| \, e^{i(\alpha_2(\omega)-c\omega)}.$$

Сами ядра k_1, k_2 находятся применением обратного преобразования Фурье. При этом функции k_1, k_2 определяются с точностью до сдвига $k_1^c(t) = k_1(t - c)$, $k_2^c(t) = k_2(t + c)$.

Переходный режим. В переходном режиме мы имеем возможность действовать оператором T лишь на функции с носителями в правой полуоси $(0, +\infty)$. Здесь мы покажем, что при некоторых дополнительных предположениях сформулированная выше задача идентификации может быть решена с использованием наиболее простого семейства входных сигналов φ_β. Предположим, что функции k_1, k_2 положительны и равны нулю на $(-\infty, 0)$ и, кроме того, $f(0) = 0$. Рассмотрим сигнал

$$\varphi_\beta(t) = \begin{cases} \beta; & t \geqslant 0; \\ 0; & t < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$T(\varphi_\beta) = k_2 * f(k_1 * \varphi_\beta) = k_2 * f\left(\beta \int_0^\infty k_1(t - s)\, ds\right) = k_2 * f\left(\beta \int_0^t k_1(s)\, ds\right).$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, в силу ограниченности второго сомножителя в свертке, получим

$$\lim_{t\to\infty} T(\varphi_\beta)(t) = \int_0^\infty k_2(s)\, ds f\left(\beta \int_0^\infty k_1(s)\, ds\right) = f(\beta).$$

Отметим, что сходимость здесь достаточно быстрая, если функции k_1, k_2 достаточно быстро убывают на бесконечности. Перейдем к определению ядер k_1, k_2 интегральных операторов. Пусть φ — произвольный положительный сигнал. Например, простейший сигнал

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1; & t \in [0, \tau]; \\ 0, & t \overline{\in} [0, \tau]; \end{cases} \quad \tau > 0. \tag{6}$$

Дополнительно сделаем предположение о нелинейной характеристике: $f'(0) \neq 0$, $f''(0) \neq 0$. Через φ^α обозначим семейство сигналов

$$\varphi^\alpha = \alpha\varphi; \quad -\infty < \alpha < \infty.$$

Тогда $T(\varphi^\alpha) = k_2 * f(\alpha\varphi * k_1)$. Отсюда

$$\frac{1}{f'(0)} \frac{\partial T(\varphi^\alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = k_2 * k_1 * \varphi, \quad \frac{1}{f''(0)} \frac{\partial^2 T(\varphi^\alpha)}{\partial \alpha^2}\bigg|_{\alpha=0} = k_2 * (k_1 * \varphi)^2. \tag{7}$$

Поскольку функции $\frac{1}{f'(0)} \frac{\partial^2 T(\varphi^\alpha)}{\partial \alpha^2}\Big|_{\alpha=0}$, $k_1 * \varphi$ принадлежат $L^1(0, \infty)$, то определена их свертка, которая в силу (7) равна:

$$\left[\frac{1}{f''(0)} \frac{\partial^2 T(\varphi^\alpha)}{\partial \alpha^2}\Big|_{\alpha=0}\right] * (k_1 * \varphi) = \left[\frac{1}{f'(0)} \frac{\partial T(\varphi^\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}\right] * (k_1 * \varphi)^2. \tag{8}$$

Обозначим выражения в квадратных скобках, в правой и левой частях равенства (8), соответственно, u, v и положим $g = k_1 * \varphi$. Функция $g \in L^1(0, \infty)$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$u * g = v * g^2. \tag{9}$$

При этом нас интересуют лишь положительные решения этого уравнения. Пусть $h > 0$. Будем искать решение в классе ступенчатых функций

$$g(t) = g(kh);\ t \in (kh, (k+1)h)\ (k = 0, 1, \ldots);$$
$$g(t) = 0;\ t < 0.$$

Очевидно, что вместе с каждой функцией g уравнению (9) удовлетворяют и все сдвиги $g^t(x) = g(x-t)$. Поэтому для определенности положим $g(0) \neq 0$. Из (9) получим

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{kh}^{(k+1)h} u(nh - x)\, dx\, g(kh) = \sum_{k=0}^{n} \int_{kh}^{(k+1)h} v(nh - x)\, dx\, g^2(kh).$$

Обозначим

$$u_k = \int_{kh}^{(k+1)h} u(x)\, dx;\quad v_k = \int_{kh}^{(k+1)h} v(x)\, dx;\quad u_{ij} = u_{i-j-1};\quad v_{ij} = v_{i-j-1}.$$

Тогда $g^2(nh) = \sum_{k=0}^{n} w_{nk} g(kh)$, где w_{nk} — элемент матрицы $(v_{ij})^{-1}(u_{ij})$. Отсюда получаем рекуррентную формулу для вычисления $g(nh)$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$g(0) = w_{00};\quad g(nh) = -\frac{w_{00}}{2} \pm \sqrt{\frac{w_{00}^2}{4} + \sum_{k=0}^{n-1} w_{nk} g(kh)}.$$

Отметим, что для единственности положительного решения достаточно потребовать $w_{nk} \geqslant 0$ (при этом положительное решение получается, если брать положительный корень). Интерпретировать это условие можно следующим образом. При дискретизации уравнения (9) мы получаем свертку элементов пространства l^1 абсолютно суммируемых последовательностей:

$$\tilde{u} * \tilde{g} = \tilde{v} * \tilde{g}^2,\quad \tilde{u} = (u_k)_{k=0}^{\infty},\quad \tilde{v} = (v_k)_{k=0}^{\infty},\quad \tilde{g} = (g_k)_{k=0}^{\infty},\quad \tilde{g}^2 = (g_k^2)_{k=0}^{\infty}. \tag{10}$$

Переходя к преобразованиям Фурье, т. е. к абсолютно сходящимся степенным рядам на окружности, получим

$$\hat{\tilde{u}} \hat{\tilde{g}} = \hat{\tilde{v}} \quad (\hat{\tilde{g}} * \hat{\tilde{g}}).$$

Так как $\hat{\tilde{v}}$ нигде на окружности $|z| = 1$ не обращается в нуль, то $\hat{\tilde{g}} * \hat{\tilde{g}} = w \hat{\tilde{g}}$, где $w = \frac{\hat{\tilde{u}}}{\hat{\tilde{v}}}$. Функция $\hat{\tilde{g}}$ представляет граничные значения функции, аналогической в круге $|z| < 1$, для которой мы оставим то же обозначение. Из (10) получаем

$$[\hat{\tilde{g}}^{(n)}(0)]^2 = [w \hat{\tilde{g}}]^{(n)}(0).$$

Отсюда

$$\hat{g}^{(n)}(0) = -\frac{w(0)}{2} \pm \sqrt{\frac{w(0)^2}{4} + \sum_{k=0}^{n-1} w^{(n-k)}(0)\,\hat{g}^{(k)}(0)}.$$

Условие единственности, приведенное выше, означает положительность производных $w^s(0)>0$, или, что то же самое, положительность обратного преобразования Фурье функции w. Таким образом, мы требуем, чтобы функция w служила преобразованием Фурье некоторой положительной последовательности из l^1. По известной теореме Бохнера [3] для этого необходимо и достаточно, чтобы w была положительно определенной функцией на окружности. Это означает, что для любого набора точек $e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}$ на окружности и любых комплексных чисел $z_1, \ldots, z_n$

$$\sum_{k,l=1}^{n} z_k \bar{z}_l w\left(e^{i(\varphi_k-\varphi_l)}\right) \geqslant 0,$$

или, возвращаясь к прежним обозначениям:

$$\sum_{k,l=1}^{n} z_k \bar{z}_l \frac{\sum_{s=0}^{\infty} u_s e^{i(\varphi_k-\varphi_l)}}{\sum_{s=0}^{\infty} v_s e^{i(\varphi_k-\varphi_l)}} \geqslant 0.$$

Представляет интерес способ конструктивной проверки условия единственности положительного решения уравнения (10). Найдя функцию $g=k_1*\varphi$ и решая интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, получим искомое ядро k_1. Если φ определена, как в (6), то k_1 можно найти из условия

$$g'(x)=k_1(x)-k_1(x-\tau).$$

Функцию k_2 можно определить теперь, например, из (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Дробышев. Оптимизация систем сбора и обработки информации. Реферат докт. дисс. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1970.
2. Ю. И. Худак. Об одной нелинейной задаче автоматического регулирования.— В сб. «Вычислительные методы и программирование». М., Изд-во МГУ, 1970.
3. W. Rudin. Fourier analysis on groups. Int., N. Y., 1962.

Поступила в редакцию 20 сентября 1972 г.

УДК 62—50

В. П. БУДЯНОВ, А. О. ЕГОРШИН
(Новосибирск)

СГЛАЖИВАНИЕ СИГНАЛОВ И ОЦЕНИВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПОМОЩЬЮ ЦВМ

Введение. Автоматическая обработка измерительной информации с помощью ЦВМ является неотъемлемой частью функционирования сложных систем управления, систем автоматизированного контроля,