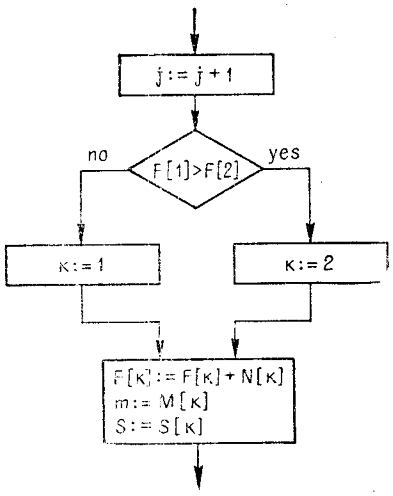

Рис. 5.

ной программе. Если же мертвое время переменное, то оно определяется из зависимости

$$TH1:=A1*u+B,$$

где A1 — мертвое время на один канал; B — постоянная составляющая переменного мертвого времени. Оценка полученной информации производится методом, подобным методу с основной программой.

Амплитудный спектр, изображенный на рис. 2, состоит из нескольких пиков. В наших программах мы рассматривали образование только одного пика. Если образовать несколько следующих по времени друг за другом пиков, то можно исказить амплитудный спектр. Поэтому перед вводом случайного числа с нормальным распределением была включена еще одна вспомогательная программа (рис. 5), которая выбирает числа из различных нормальных распределений. С помощью этой вспомогательной программы образуются два пика. От отношения интенсивности зависит то, сколько раз нужно подряд выбрать числа из каждого распределения. Данная программа может быть расширена на любое число пиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Маталин, С. И. Чубаров, А. А. Иванов. Многоканальные анализаторы ядерной физики. М., Атомиздат, 1967.
2. Я. Бири, Г. Резников, К. Тарнаи. Оценка с помощью ЭВМ спектральных искажений. Препринт 13-4720. Дубна, 1969.
3. B. Soucek. Losses in systems with variable dead time.— Nuclear Instruments and Methods, 1964, 27.

Поступила в редакцию 18 ноября 1971 г.

УДК 517.948.32

Р. Д. БАГЛАЙ

(Новосибирск)

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Методы выбора параметра регуляризации рассматривались в [1—3]. Исходя из этих работ, мы пришли к иному, более обоснованному и вполне конструктивному способу, в котором используются свойства функции чувствительности регуляризованного решения к относительному изменению параметра регуляризации. Вначале остановимся на одной из тех физических задач, при решении которой применялся этот способ, а также напомним основные пункты общей схемы регуляризации по А. Н. Тихонову [4].

Рассмотрим одномерный преобразователь (фильтр), математическая модель которого представима в виде интегрального уравнения типа свертки

$$L\varphi = F, \qquad (1)$$

где L — интегральный оператор с ядром K; φ — входной сигнал; F — приближенное значение выходного сигнала, равного f. Пусть ставится задача восстановления входного сигнала φ по известным F и K. Положим, что математически эта задача определена, т. е. решение уравнения (1) существует и единственно. Примем также, что преобразователь физически реализуем. Для электронного фильтра с сосредоточенными параметрами это означает, что он устойчив в малом, а Фурье-образ ядра $K(\omega)$ — дробно-рациональная функция с нулем на бесконечности: $K(\omega \to \infty) \to 0$ как A/ω^n, где n — целое положительное число; $A = \text{const}$. Из последнего условия следует, что мы не допускаем δ-импульсов в ядре. В теории электрических цепей, например при изучении «идеальных» дифференцирующих преобразователей, допускают δ-импульс в нуле функции K. В этом случае фильтр описывается интегральным уравнением второго рода и задача восстановления упрощается, но такое допущение не физично.

В практических задачах функции F и K задаются в виде эмпирических числовых массивов, поэтому наряду с интегральным будем рассматривать также матричный оператор L. Из-за эмпирического характера исходных данных система (1) может оказаться несовместной. Способ проверки на совместность известен и вытекает из следующего утверждения: необходимым и достаточным условием совместности системы (1) является ортогональность вектора F ко всем решениям однородной сопряженной системы $L^*\varphi = 0$. Здесь L^* — оператор, сопряженный с L, и для матричных операторов обозначает транспонированную матрицу $L^{\text{т}}$. Это условие является матричным аналогом альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений. Для борьбы с несовместностью используют метод наименьших квадратов. Практически дело сводится к решению уравнения

$$L^* L\varphi = L^* F, \qquad (2)$$

которое получается при минимизации функционала $\|L\varphi - F\|^2_{L_2}$. (Норма в L_2 здесь и далее рассматривается на интервале (a, b)). Если система (1) совместна, то из (2) получим точное ее решение.

Перейдем к обсуждению некорректности нашей задачи. При вычислениях исходные данные (F, K) всегда помещаются в конечномерное пространство. К тому же полагаем, что задача математически определена. Следовательно, обратный оператор L^{-1} ограничен и ограничено влияние шума η на решение. В этом смысле задача теоретически корректна. Однако решение, построенное в присутствии шума, может сильно искажаться, «разваливаться». Это хорошо известное явление, которое возникает при решении обширных косоугольных систем алгебраических уравнений. Способов борьбы с ним много. Новым и эффективным является способ регуляризации решения, основанный на общей схеме А. Н. Тихонова. Согласно этой схеме, поиск приближенного решения φ_α уравнения (1) ведется посредством минимизации функционала

$$J_{\varphi_\alpha} = \|L\varphi_\alpha - F\|^2_{L_2} + \alpha(q\|\varphi_\alpha\|^2_{L_2} + q_1\|\varphi'_\alpha\|^2_{L_2}; \quad q > 0,\ q_1 > 0. \qquad (3)$$

Здесь α — действительное и положительное число, которое называют параметром регуляризации. Несколько слов о конструкции выражения (3). Первое слагаемое отражает хорошо известное требование минимума невязки сигналов F и $L\varphi$ на выходе фильтра. Но из-за сглаживающего действия фильтра (оператора L) минимум невязки в пределах заданной точности может достигаться при весьма различных сигналах φ, которые сильно различаются высокочастотной частью спектра. Уменьшить неопределенность можно, если среди всех этих сигналов выбрать тот, который сам минимален по энергии, т. е. потребовать еще и минимизации интеграла от квадрата искомого сигнала. Дальнейшее усиление получим, если сверх того потребуем минимизации интеграла от квадрата производной искомой функции и т. д. Этой цели служит второе слагаемое в выражении (3). Его вес в общем функционале определяется величиной параметра регуляризации α.

Чтобы отыскать ту функцию φ_α, которая доставляет минимум выражению (3) при фиксированном α, необходимо решить вариационную задачу. Сделать это можно, например, путем решения уравнения Эйлера:

$$(\alpha D_2 + L^*L)\,\varphi_\alpha = L^*F \tag{4}$$

при граничных условиях $\varphi'_\alpha(a) = \varphi'_\alpha(b) = 0$. Здесь $D_2 = q - \frac{d^2}{dt^2}$; q_1 принято равным 1.

Краевую задачу (4) можно свести к равносильному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Но для практического применения метода делать это незачем. Достаточно решить интегро-дифференциальное уравнение (4). В матричной форме оно принимает вид

$$(\alpha H + L^{\mathrm{T}} L)\,\varphi_\alpha = L^{\mathrm{T}} F, \tag{5}$$

где H — ленточная матрица, а для регуляризации нулевого порядка, т. е. когда $q_1=0$, H — диагональная. При $\alpha=0$ выражения (4), (5) представляют исходную форму записи для решения уравнений по методу наименьших квадратов.

Трудным в этой схеме решения является вопрос о выборе величины α. Следует сразу сказать, что ответ на этот вопрос в данной работе дается для асимптотики при $\alpha \to 0$. Далее примем следующий порядок изложения. Вначале, используя Фурье-образы, попытаемся рассмотреть регуляризацию на привычном для нас языке фильтров. Затем приведем оценки, полученные в [3]. Наконец, дадим наш прием выбора величины α и изложим некоторые результаты его практического применения.

Запишем уравнение (4) в Фурье-образах:

$$[\alpha(\omega^2 + q) + L(-\omega)\,L(\omega)]\,\varphi_\alpha^F(\omega) = L(-\omega)\,F(\omega).$$

Регуляризованное решение можем представить в виде

$$\varphi_\alpha^F(\omega) = W(\omega),\, F(\omega), \tag{6}$$

где

$$W(\omega) = \frac{L(-\omega)}{|L(\omega)|^2 + \alpha(\omega^2 + q)}\,; \quad |L(\omega)|^2 = L(-\omega)\,L(\omega).$$

Для наглядности рассмотрим структурную схему (рис. 1). Здесь I — исходный, физически реализуемый фильтр (L), который осуществляет прямое преобразование $\varphi \to f$; II — фильтр (W) осуществляет обратное преобразование $f + \eta \to \varphi_\alpha^F$. Преобразователь II физически нереализуем с помощью электронных устойчивых звеньев аналогового типа. Причина тому — особенность метода наименьших квадратов, который требует применения фильтров вида $L(-\omega)$. Но эту сторону дела мы сейчас обсуждать не будем. Поскольку II — линейный фильтр, то его действие на сигналы f и η можно рассматривать порознь.

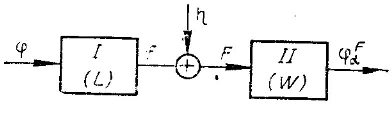

Рис. 1.

Положим $\eta \equiv 0$. Тогда вместо (6) можем записать

$$\varphi_{\alpha}^{f}(\omega) = V(\omega)\,\varphi(\omega), \tag{7}$$

где

$$V(\omega) = \frac{|L(\omega)|^2}{|L(\omega)|^2 + \alpha(\omega^2 + q)}, \quad \varphi(\omega) = \frac{f(\omega)}{L(\omega)} -$$

точное решение. Как видим, регуляризованное φ_{α}^{f} и точное φ решения являются соответственно выходным и входным сигналами фильтра V, который не изменяет спектра фаз сигнала φ, а в спектре амплитуд подавляет высокочастотные составляющие. Расплатой за то, что мы осмелились изменить оператор обратного преобразования ($\alpha \neq 0$) является систематическая ошибка

$$\Delta\varphi_{\alpha}^{f}(\omega) = \varphi_{\alpha}^{f}(\omega) - \varphi(\omega) = -\varphi(\omega)\frac{\alpha(\omega^2 + q)}{|L(\omega)|^2 + \alpha(\omega^2 + q)}. \tag{8}$$

Ее норма $\| \Phi^{-1}[\Delta\varphi_{\alpha}^{f}(\omega)] \|_{L_2}$, т. е. средний квадрат ошибки, падает до нуля при $\alpha \to 0$ и возрастает до $\|\varphi\|_{L_2}$ при $\alpha \to \infty$. Здесь Φ^{-1} — оператор обратного преобразования Фурье.

Теперь положим $f \equiv 0$, а спектральную плотность шума η обозначим через $S(\omega)$. Запишем выражение для дисперсии шума на выходе фильтра II:

$$\sigma_{\alpha}^{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(\omega)|^2 S(\omega)\,d\omega}{[|L(\omega)|^2 + \alpha(\omega^2 + q)]^2}. \tag{9}$$

Если порядок убывания функции $S(\omega)$ при $\omega \to \infty$ меньше порядка убывания $[L(\omega)]^2$, для которого мы приняли асимптотику вида $\frac{A}{\omega^n}$, то дисперсия регуляризованного решения неограниченно растет при $\alpha \to 0$. Оценки для систематической $\Delta\varphi_{\alpha}^{f}$ и случайной σ_{α}^{2} ошибок при $\alpha \to 0$, $S = \text{const}$ и $\alpha q \approx 0$ даны в [3]:

$$\Delta\varphi_{\alpha}^{f}(t) = \frac{1}{n+1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)\right]^{-1}\frac{d\varphi}{dt}\left(\frac{\alpha}{A^2}\right)^{\frac{1}{2n+2}}; \tag{10}$$

$$\sigma_{\alpha}^{2} = \frac{S}{4(n+1)^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)\right]^{-1}\left(\frac{1}{A^2}\right)^{\frac{1}{2n+2}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2n+1}{2n+2}}. \tag{11}$$

Там же из условия

$$\sup_{t}\left[\Delta\varphi_{\alpha}^{f}(t)\right]^2 = \sigma_{\alpha}^{2} \tag{12}$$

находится почти оптимальное значение α:

$$\alpha = A^{\frac{2}{2n+3}}\left[\frac{S\sin\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)}{4B^2}\right]^{\frac{2n+2}{2n+3}}, \tag{13}$$

где

$$B^2 = \sup_{t}\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|^2.$$

Здесь уместно заметить, что условие (12) является приближенным выражением критерия

$$\min_{\alpha}\sup_{t}\{M[\varphi_{\alpha}^{F}(t) - \varphi(t)]^2\},$$

где M — математическое ожидание. Действительно, для некоррелированных φ и η этот критерий можем записать в виде

$$\min_{\alpha}\sup_{t}\{[\Delta\varphi_\alpha^f(t)]^2+\sigma_\alpha^2\}.$$

Но для стационарного шума σ_α^2 не зависит от t. Следовательно, приближение состоит в том, что точка минимума суммы двух функций подменяется точкой их пересечения [см. (12)]. Если учесть свойство функций (10) и (11), то выражение для почти оптимального α можно записать иначе. Из условия $[\Delta\varphi_\alpha^f(t)]^2=\sigma_\alpha^2$ найдем $\alpha(t)>0$, а затем вычислим норму $\inf[\alpha(t)]$, т. е. из всех значений $\alpha(t)$ примем наименьшее. Оно и обеспечит «наилучшее» восстановление тонкой структуры сигнала φ. В (12) можно применять и иные нормы; тогда получим другие выражения для α, которые уже не будут совпадать с (13). Во всех этих случаях остается неясной связь почти оптимального α с α_0, которое минимизирует средний квадрат ошибки регуляризованного решения $\varphi_\alpha^F(t)$. Важно здесь и другое. Для того чтобы воспользоваться выражением (13), необходимо априори знать величину B, и это резко снижает его конструктивность. Сейчас мы изложим иной, конструктивный способ выбора α. Запишем вначале функционал

$$\|M[\varphi_\alpha^F(t)-\varphi(t)]^2\|_{L_1(a,b)}. \tag{14}$$

Поскольку φ и η статистически независимы, то выражение (14) равносильно (15):

$$\int_a^b[(\Delta\varphi_\alpha^f)^2+\sigma_\alpha^2]\,dt. \tag{15}$$

Из (15) видно, что ошибка регуляризованного решения нами рассматривается в L_2 (a, b). Значение α, при котором достигает минимума функционал (15), назовем оптимальным в смысле средних квадратов и обозначим через α_0.

Теперь рассмотрим такой функционал:

$$\left\|M\left\{\Phi^{-1}\left[\frac{\partial\varphi_\alpha^F(\omega)}{\partial\ln\alpha}\right]\right\}^2\right\|_{L_1(a,b)}, \tag{16}$$

где $\dfrac{\partial\varphi_\alpha^F(\omega)}{\partial\ln\alpha}=Q_\alpha^F(\omega)$ — комплексная функция чувствительности регуляризованного решения в присутствии шума η к относительному изменению α. Из условия дифференцируемости интеграла Фурье по параметру следует, что действительная функция чувствительности $Q_\alpha^F(t)$ может быть получена из комплексной — $Q_\alpha^F(\omega)$ обратным преобразованием Фурье. Для того чтобы параметр α, найденный из условия минимума функционала (16), был оптимальным в смысле средних квадратов, достаточно показать, что минимум выражений (16) и (15) достигается при одном и том же α. Мы изучим функционал (16) при тех же предположениях, при которых получены оценки (10), (11), а именно при асимптотике вида $\alpha\to0$.

Положим $\eta\equiv0$ и запишем выражение для функции чувствительности

$$Q_\alpha^f(\omega)=\frac{\partial\varphi_\alpha^f(\omega)}{\partial\ln\alpha}=\varphi(\omega)\frac{\alpha(\omega^2+q)}{|L(\omega)|^2+\alpha(\omega^2+q)}\cdot\frac{|L(\omega)|^2}{|L(\omega)|^2+\alpha(\omega^2+q)}. \tag{17}$$

Функция $Q_\alpha^f(\omega)$ отличается от $\Delta\varphi_\alpha^F(\omega)$ [см (8)] сомножителем, который сильно меняет дело при больших значениях α: норма $\| \Phi^{-1} [Q^f_\alpha \omega(L_2)] \|_{L_2}$ уменьшается до нуля не только при $\alpha \longrightarrow 0$, но при $\alpha \longrightarrow \infty$. Чтобы оценить ее поведение при α, близком к нулю, выразим вначале Q^f_α через $\Delta\varphi^f_\alpha$:

$$Q^f_\alpha(\omega) = -\Delta\varphi^f_\alpha(\omega) + \Delta\varphi^f_\alpha(\omega) \frac{\alpha(\omega^2+q)}{|L(\omega)|^2 + \alpha(\omega^2+q)}. \tag{18}$$

Применяя оценку (10) ко второму слагаемому, из (18) получим

$$Q^f_\alpha(t) = -\Delta\varphi^f_\alpha(t) + \frac{1}{(n+1)^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)\right]^{-2} \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\frac{\alpha}{A^2}\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{19}$$

Как видим, для сигналов φ, вторая производная которых ограничена, в асимптотике ($\alpha \longrightarrow 0$) второе слагаемое в выражении (19) имеет второй порядок малости по сравнению с $\Delta\varphi^f_\alpha(t)$. Следовательно, можно утверждать, что **для функций φ с ограниченной второй производной и для ядер с асимптотикой A/ω^n функция чувствительности $Q^f_\alpha(t) = -\frac{\partial\varphi^f_\alpha(t)}{\partial \ln\alpha}$ регуляризованного решения $\varphi^f_\alpha(t)$ уравнения (1) при $\alpha \longrightarrow 0$ совпадает с отклонением $\varphi^f_\alpha(t)$ от точного решения $\varphi(t)$ и имеет вид**

$$Q^f_\alpha(t) = C_1 \frac{d\varphi}{dt} \alpha^{\frac{1}{2n+2}}, \tag{20}$$

где

$$C_1 = \frac{1}{n+1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)\right]^{-1} A^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Далее положим $f \equiv 0$ и запишем выражение для дисперсии на выходе преобразователя II:

$$\sigma^2_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(\omega)\, d\omega, \tag{21}$$

где

$$S_\alpha(\omega) = |W(\omega)|^2 S;\ S = \text{const}.$$

Функцию чувствительности для дисперсии регуляризованного решения представим так:

$$Q^\sigma_\alpha = -\frac{d\sigma^2_\alpha}{\partial \ln n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(\omega) \frac{\alpha(\omega^2+q)\, d\omega}{|L(\omega)|^2 + \alpha(\omega^2+q)}. \tag{22}$$

О поведении σ^2_α при $\alpha \to 0$ можно сделать заключение непосредственно из рассмотрения выражения для спектральной плотности $S_\alpha(\omega)$: $S_\alpha(\omega) \to \infty$ при $\alpha \to 0$. Труднее сделать такое заключение для функции чувствительности, поскольку ее спектральная плотность [см. (22)] ведет себя более сложно: если $\alpha \to 0$, то $S_\alpha(\omega)$ неограниченно возрастает, но второй сомножитель уменьшается до нуля. Но $0\sigma^2_\alpha$ мы уже знаем бóльшее — оценку (11). Попытаемся получить оценку также и для функции чувствительности. Существенным допущением, которое здесь принимается, является замена ядра K (оператора L) его асимптотикой A/ω^n. Оправдание тому следующее. Интеграл (21) расходится при $\alpha \to 0$, но $\int_{-\omega_1}^{\omega_1} S_{\alpha_1}(\omega) d\omega$ сходится при $\alpha \to 0$ и остается ограниченным для любого фиксированного ω_1. Поэтому основной вклад в дисперсию дают частоты $\omega > \omega_1$. Но именно для высоких частот оправдана замена ядра его асимптотикой.

Представим (22) в виде

$$Q_\alpha^\sigma = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(\omega)\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(\omega)\,\frac{|L(\omega)|^2\,d\omega}{|L(\omega)|^2 + \alpha(\omega^2+q)}. \qquad (23)$$

Оценку для первого слагаемого мы знаем [см. (11)]: 2σ, так что наша задача — найти оценку для второго слагаемого, которое обозначим $\Delta\sigma$. Подставив в (23) выражение для $S_\alpha(\omega)$ и заменив $L(\omega)$ на $\frac{A}{\omega^n}$, получим

$$\Delta\sigma = \frac{S}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{A^4}{\omega^{4n}}\,d\omega}{\left[\frac{A^2}{\omega^{2n}} + \alpha(\omega^2+q)\right]^3} = \frac{2S}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{A^{-2}\omega^{2n}\,d\omega}{[1 + A^{-2}\alpha\,\omega^{2n}(\omega^2+q)]^3}.$$

Выполнив замену переменных $X = A^{-2}\alpha\omega^{2n+2}$ при $\alpha q \approx 0$, можем записать

$$\Delta\sigma = \frac{S}{\pi(n+1)}A^{-\frac{1}{n+1}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{[1+x]^3}, \qquad (24)$$

где $\mu = \frac{2n+1}{2n+2}$. Интеграл в (24) берется в общем виде

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{[1+\beta x]^{r+1}} = (-1)^r\,\frac{\pi}{\beta}\binom{\mu-1}{r}\operatorname{cosec}(\mu\pi);\quad 0 < \mu < r+1.$$

Вычисляя его при $\beta = 1$, $r = 2$, будем иметь

$$\Delta\sigma = 1 + \frac{1}{2n+2}\,\frac{S}{4(n+1)^3}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)A^{-\frac{1}{n+1}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2n+1}{2n+2}}.$$

Подставляя полученные значения в (23), находим, что

$$Q_\alpha^\sigma = \frac{2u+1}{2n+2}\,\sigma_\alpha^2. \qquad (25)$$

Таким образом, справедливо утверждение: **для ядер с асимптотикой $\frac{A}{\omega^n}$ функция чувствительности Q_α^σ дисперсии шума регуляризованного решения уравнения (1) при $\alpha \to 0$ отличается от дисперсии σ_α множителем $\frac{2n+1}{2n+2}$ и имеет вид**

$$Q_\alpha^\sigma = \frac{2n+1}{2n+2}\,C_2 S\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2n+1}{2n+2}}, \qquad (26)$$

где

$$C_2 = \frac{1}{4(n+1)^2}\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)A^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Из (26), в частности, следует, что при $S \to 0$ регуляризованное решение будет стремиться к точному, если $\frac{S}{\alpha^{\frac{2n+1}{2n+2}}} \to 0$. Но для этого порядок убывания S должен превосходить порядок убывания α.

Далее попытаемся выразить параметр регуляризации, при котором достигает минимума функционал (16) или равносильное ему выражение

$$\int\limits_a^b \left[(\Delta \varphi_\alpha^f)^2 + \frac{2n+1}{2n+2}\sigma_\alpha^2 \right] dt, \tag{27}$$

через значение α_0, оптимальное в смысле наименьших квадратов, т. е. через то значение параметра регуляризации, при котором достигает минимума выражение (15). Дифференцируя (27) по α, получим

$$\frac{1}{n+1} C_3 \alpha^{-\frac{n}{n+1}} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 C_4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2n+2}+2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{n+1} C_3 \alpha^{\frac{2n+3}{2n+2}} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 C_4 = 0, \tag{28}$$

где

$$C_3 = C_1^2 \int\limits_a^b [\varphi'(t)]^2 dt; \quad C_4 = C_2 \int\limits_a^b S dt.$$

Обозначим через α_1 то значение параметра регуляризации, при котором удовлетворяется уравнение (28). Поступая точно так же, из (15) получим

$$\frac{1}{n+1} C_3 \alpha^{\frac{2n+3}{2n+2}} - \frac{2n+1}{2n+2} C_4 = 0. \tag{29}$$

Из (28) и (29) находим

$$\alpha_1^{\frac{2n+3}{2n+2}} = \frac{2n+1}{2n+2} \alpha_0^{\frac{2n+3}{2n+2}}$$

или

$$\alpha_1 = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\frac{2n+2}{2n+3}} \alpha_0. \tag{30}$$

Следовательно, можно утверждать, что **при $\alpha \to 0$ параметр регуляризации α_1, выбранный из условия минимума функционала $\left\| M \left[\frac{\partial \varphi_\alpha^F(t)}{\partial \ln \alpha} \right]^2 \right\|_{L_1(a,\, b)}$, отличается множителем $\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\frac{2n+2}{2n+3}}$ от оптимального — α_0, полученного при минимиазции функционала $\|M[\varphi_\alpha^F(t) - \varphi(t)]^2\|_{L_1(a,\, b)}$, где φ_α^F и φ — соответственно регуляризованное и точное решение уравнения (1), ядро которого имеет асимптотику A/ω^n; M — математическое ожидание.**

Полезно иметь в виду, что современные преобразователи охватываются глубокой отрицательной обратной связью с целью стабилизации их режима работы и имеют коэффициент усиления более 1, а условие устойчивости в малом для систем с обратной связью накладывают известные ограничения на их асимптотику при $\omega \to \infty$. Точнее говоря, спад частотной характеристики не может быть слишком быстрым [5]. Поэтому в практических задачах n обычно невелико ($n \sim 1, 2$). Невелико и различие между α_1 и α_0. Переходя к практической стороне дела, нам следует учесть некоторые моменты, которые несколько меняют соотношения, записанные выше. В первую очередь это относится к функционалам (15) и (16). Часто для вычислений задается одна реализация сигнала F и при этом принимается гипотеза об эргодичности процесса η. Тогда вместо (15) и (16) можем записать соответственно:

$$\min_{\alpha} \|\varphi_{\alpha}^{F}(t) - \varphi(t)\|_{L_2}; \tag{31}$$

$$\min_{\alpha} \left\| \Phi^{-1} \left[\frac{\partial \varphi_{\alpha}^{F}(\omega)}{\partial \ln \alpha} \right] \right\|_{L_2} \tag{32}$$

(см. также [1]). При этом изменяются величины α_1 и α_0, для которых сохраним прежние обозначения. Важно, что все утверждения, сделанные выше, остаются в силе.

Второй момент связан с функцией чувствительности для дисперсии. Поскольку при вычислениях исходные данные помещаются в конечномерное пространство, то при $\alpha \to 0$ σ_2^2 остается ограниченной и $\frac{\partial \sigma_{\alpha}^2}{\partial \ln \alpha} \to 0$. Но в реальных задачах шум не бывает столь малым, чтобы приходилось иметь дело с α весьма близким к нулю. А оценка для ошибки за счет шума, полученная при $\alpha \to 0$, близка к верхней оценке для той же ошибки, полученной при произвольном α [2]. Так что для гладких функций φ с этим моментом можно не считаться. Подтверждают это и многочисленные вычислительные эксперименты.

Для функции φ нулевого порядка гладкости, например для единичного скачка, следовало бы провести дополнительное изучение, поскольку $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ при $t > 0$ и выражения (28), (29) вырождаются. Здесь этого делать не будем. Отложим также исследование при асимптотике ядер иного вида, чем A/ω^n, которые встречаются при восстановлении сигналов в оптических преобразователях, длинных линиях и др.

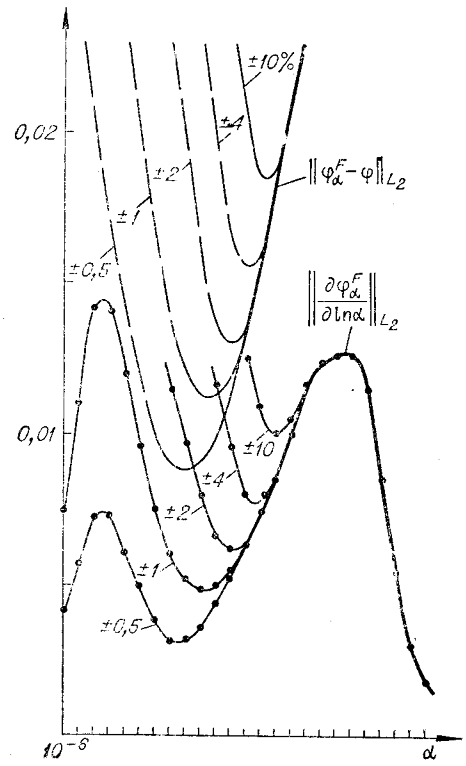

Рис. 2.

В качестве иллюстрации изложенного выше приведем примеры некоторых численных экспериментов. Вычисления проводилось одновременно по критериям (31) и (32) при изменении параметра регуляризации по закону $\alpha = 2^m \alpha_н$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$; $\alpha_н$ — начальное значение. Псевдослучайный шум с равномерным распределением, который добавлялся к сигналу f, задавался от максимального значения f_{max} соответственно $\pm(0{,}5;\ 1;\ 2;\ 4;\ 10)\%$. Во всех случаях к ядру K добавлялся шум с амплитудой $\pm 1\%$ от K_{max}. В экспериментах исходные данные задавались в сорока точках с шагом 0,1. Результаты вычислений для входного сигнала $\varphi = te^{-t}$ и ядра $K = \begin{vmatrix} 1; & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{vmatrix}$ $\left(\text{асимптотика } \frac{1}{\omega}\right)$ приведены на рис. 2, а для $\varphi = \sin \frac{2\pi}{T} t$, $0 \geqslant t \geqslant \frac{T}{2}$ и $K = \frac{t}{T} e^{-t/T}$ (асимптотика $\frac{1}{\omega^2}$) — на рис. 3. Сплошные линии соответствуют критерию, основанному на вычислении функции чувствительности регуляризованного решения, штриховые — критерию минимальной среднеквадратической ошибки.

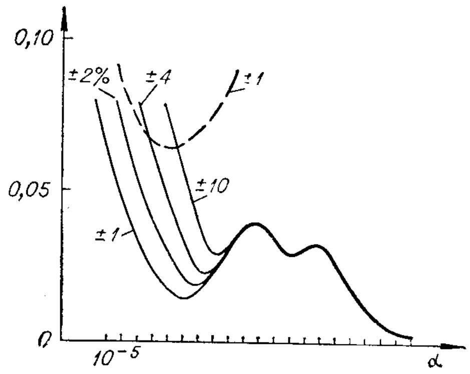

Рис. 3.

С использованием изложенного здесь критерия нами разработан ряд программ для вычисления решения уравнений типа (1), в которых автоматически определяется α_1 или α_0. Эти программы с автоматическим поиском оптимального параметра регуляризации проверялись в работе на большом числе модельных экспериментов и пока не давали осечки. Они также использовались для решения ряда практических задач. Проводились эксперименты и с мультипликативным шумом, а также статистические исследования с целью выявления смещения минимума функционалов (31) и (32) при большом числе разных реализаций шума и различных значениях его амплитуд. Здесь нет возможности сколько-нибудь полно отразить этот эмпирический материал. Результаты его анализа, как и изложенное выше, подтверждают практическую целесообразность применения критерия, основанного на свойствах функции чувствительности регуляризованного решения к параметру регуляризации, а также его надежность в работе и близость к критерию, основанному на минимизации среднего квадрата ошибки.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, Б. В. Гласко. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах.— Журнал вычислительной математики и математической физики, 1965, № 3.
2. В. А. Морозов. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации.— Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968, № 2.
3. В. Я. Арсенин, В. В. Иванов. О решении некоторых интегральных уравнений первого рода типа свертки методом регуляризации.— Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968, № 2.
4. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3.
5. Г. Боде. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. М., Изд-во иностр. лит., 1948.

Поступила в редакцию 20 сентября 1972 г.