УДК 518.12 : 62

В. И. БЕРЕГОВОЙ, В. А. ЛЬВОВ
(Новосибирск)

О ДВУХЭТАПНЫХ МЕТОДАХ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

В статье рассматривается модификация двухэтапного метода аппроксимации функций, предложенного Е. Я. Ремезом, и обсуждаются возможности его применения в обработке экспериментальных данных.

I. В основу метода Е. Я. Ремеза [1] положена формула, позволяющая выразить полигональную (непрерывную, кусочно-линейную) функцию $\pi_1(x)$ с вершинами в точках $(x_0, y_0),\dots,(x_N, y_N)$ через функции вида $|x-x_i|$:

$$\pi_1(x)=\sum_{1}^{N-1}(r_{i+1}-r_i)\,|x-x_i|+P_1(x), \tag{1}$$

где $r_i=\dfrac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$; $\quad P_1(x)=\dfrac{x}{2}(r_1+r_N)+\dfrac{1}{2}(y_0+y_N-r_1x_0-r_Nx_N)$.

Суть двухэтапного метода заключается в следующем. Функция $f(x)$, которую необходимо аппроксимировать полиномом $P_n(x)$ на отрезке $[x_0, x_N]$, предварительно аппроксимируется полигональной функцией $\pi_1(x)$ (первый этап). Затем функция $\pi_1(x)$ представляется в виде (1) и каждая из функций $|x-x_i|$ заменяется ее полиномом $P_n(x, x_i)$ наилучшего равномерного приближения (второй этап), т. е.

$$f(x)\approx P_n(x)=\sum_{1}^{N-1}(r_{i+1}-r_i)\,P_n(x, x_i)+P_1(x).$$

Указанная замена осуществляется с помощью таблиц, методика составления и использования которых подробно изложена в [1].

II. Возможны два пути модификации двуэтапного метода. Первый путь заключается в повышении точности метода за счет использования на первом этапе кусочной аппроксимации полиномами степени выше первой, второй путь — использование немногочленных приближений на втором этапе аппроксимации.

Рассмотрим первый путь модификации метода. Точность двухэтапного метода во многом определяется величиной ошибки ε, совершаемой на втором этапе аппроксимации. В методе Е. Я. Ремеза эта ошибка имеет порядок n^{-1} [2], где n — степень аппроксимирующего полинома. Ошибку ε можно значительно уменьшить, если на первом этапе аппроксимировать не полигональной функцией, а кусочно-полиномиальной функцией $\pi_k(x)$ степени $k\geqslant 2$, непрерывно дифференцируемой $(k-1)$ раз ($\pi_k(x)\in C_{k-1}$). Такие функции называются в литературе «сплайн»-функциями или многозвенниками [3], и их теория достаточно разработана. Для «сплайн»-функций может быть получено выражение, аналогичное выражению (1):

$$\pi_k(x)=\sum_{1}^{N-1}R_i\,(x-x_i)^{k-1}\,|x-x_i|+P_k(x). \tag{2}$$

Заменяя функцию $(x-x_i)^{k-1}|x-x_i|$ ее полиномом наилучшего равномерного приближения, получим ошибку ε порядка n^{-k} [3].

При практическом использовании этого метода необходимы таблицы полиномов наилучшего равномерного приближения функций вида $(x-x_i)^{k-1}|x-x_i|$ для достаточно большого числа значений x_i из некоторого интервала $[a, b]$ (учитывая возможность преобразования системы координат, точки x_i можно считать принадлежащими интервалу $[-1, 1]$). Такие таблицы нами составлены для $k=2$ и $x_i=0(0{,}05)0{,}95$. Для отрицательных x_i таблицы получаются путем простой замены переменных.

III. Рассмотрим теперь второй путь модификации метода Е. Я. Ремеза — немногочисленную двухэтапную аппроксимацию. Для этого нам потребуется выражение «сплайн»-функции через функции вида:

$$(x_i - x)_+^k = \begin{cases} (x_i - x)^k, & \text{если} \quad x_i > x; \\ 0, & \text{если} \quad x_i \leqslant x; \end{cases}$$

$$\pi_k(x) = \sum_{1}^{N-1} \widetilde{R}_i (x_i - x)_+^k + \widetilde{P}_k(x).$$

Выражение такого типа известно в теории «сплайн»-аппроксимации (см., например, [4]) и может быть легко получено из (2). Мы ограничимся рассмотрением случаев дробно-рациональной

$$(x_i - x)_+^k = A_i + B_i (C_i + x)^{-1} + \varepsilon_i(x) \tag{3}$$

и экспоненциальной аппроксимаций

$$(x_i - x)_+^k = A_i + B_i e^{-C_i x} + \varepsilon_i(x). \tag{4}$$

В этих случаях удается получить аналитическое решение в предположении, что аппроксимация $(x_i - x)_+^k$ выражениями (3), (4) производится не на конечном отрезке, а на полуоси $[0, +\infty)$. В связи с этим этап составления таблиц для различных x_i (предполагается, что $x_i \in [0,1]$) может быть исключен, если не требуется особой точности аппроксимации.

Процесс получения зависимостей $A_i = A(x_i)$, $B_i = B(x_i)$, $C_i = C(x_i)$ проиллюстрируем на примере экспоненциальной аппроксимации для $k \geqslant 2$. Для простоты обозначений положим, что переменная a пробегает все значения $\{x_i\}_1^{N-1}$. Индексы при A_i, B_i, C_i, ε_i и $L_i = \max|\varepsilon_i|$ будем опускать в тех случаях, когда это не может привести к недоразумению. Предположим, что параметры A, B и C аппроксимирующей экспоненциальной функции (4) удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} a^k - A - B = -L; \\ (a - \xi_1)^k - A - Be^{-C\xi_1} = L; \\ -k(a - \xi_1)^{k-1} + BCe^{-C\xi_1} = 0; \\ (a - \xi_2)^k - A - Be^{-C\xi_2} = -L; \\ -k(a - \xi_2)^{k-1} + BCe^{-C\xi_2} = 0; \\ -A = L, \end{cases} \tag{5}$$

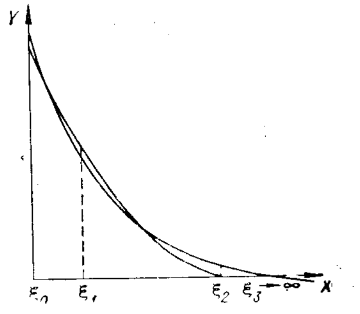

Рис. 1. Функция $y = (a-x)_+^k$ и ее аппроксимация выражением $F(x) = A + Be^{-Cx}$.

где $0 < \xi_1$, $\xi_2 < 1$ и L — некоторые неизвестные величины. Геометрически эти уравнения описывают (рис. 1) такой набор параметров A, B и C, что функция $\varepsilon(x)$ принимает равные и максимальные по модулю значения с чередующимися знаками в точках $\xi_0 = 0$, ξ_1, ξ_2 и ξ_3 — бесконечно удаленной точке.

Если решение системы (5) существует, то оно является минимальным. Действительно, допустим, что существует функция $\widetilde{F}(x) = \widetilde{A} + \widetilde{B}e^{-Cx}$

такая, что $\widetilde{L}<L$. Отсюда

$$\widetilde{F}(0)<F(0);\quad \widetilde{F}(\xi_1)>F(\xi_1);\quad \widetilde{F}(\xi_2)<F(\xi_2);\quad \widetilde{F}(\infty)>F(\infty),$$

т. е. уравнение $(A-\widetilde{A})+Be^{-Cx}-\widetilde{B}e^{-\widetilde{C}x}=0$ имеет не менее трех положительных корней. Однако по обобщенной теореме Декарта ([5], статья 3) это уравнение может иметь не более, чем два положительных корня. Полученное противоречие доказывает утверждение о минимальности решения A, B, C в случае его существования

Попытаемся решить систему (5). Выполняя несложные преобразования и вводя обозначения $\alpha=\frac{a-\xi_2}{a-\xi_1}$ и $\beta=\frac{a}{a-\xi_1}$, получим следующие соотношения для определения α, β, B, L, A, C:

$$\frac{k}{k-1}=\frac{\ln\alpha}{\alpha-1};\quad \alpha^k-\alpha^{k-1}=\beta^k-e^{k(\beta-1)};\quad B=\frac{a^k}{\beta^k}e^{k(\beta-1)};$$

$$L=\frac{B-a^k}{2};\quad A=-L;\quad C=\frac{k\beta}{a}.$$

Величины α и β определяем последовательно из первых двух уравнений. Начальное значение для α удобно находить графически (рис. 2). Для этого строим график функции $y=\frac{\ln\alpha}{\alpha-1}$ $(0<\alpha<1)$ и определяем точку ее пересечения с прямой $y=\frac{k}{k-1}$. Найденное значение α может быть уточнено с помощью известных методов. Уравнение для нахождения β имеет единственный корень, удовлетворяющий условию $\beta\geqslant 1$, что легко заметить из геометрического анализа уравнения

$$e^{k(\beta-1)}-\beta^k-\alpha^{k-1}(1-\alpha)=0.$$

Левая часть указанного уравнения имеет локальный максимум в точке $\beta=1$, и поэтому любая градиентная процедура, начинающаяся с про-

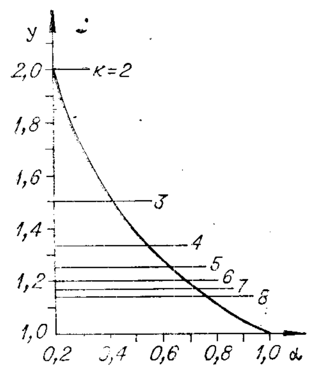

Рис. 2. Графическое решение уравнения $\frac{k}{k-1}=\frac{\ln\alpha}{\alpha-1}$.

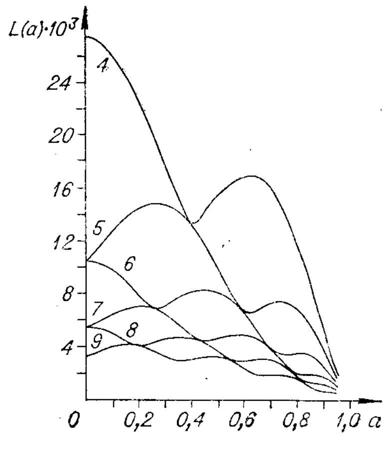

Рис. 3. Графики ошибок равномерной аппроксимации функции $(x-a)\times|x-a|$ многочленами 4—9-й степеней.

извольного $\beta > 1$, даст искомый корень. Для нахождения начального значения β можно воспользоваться также формулой

$$\beta \approx 1 + \sqrt{\frac{\alpha^{k-1}(1-\alpha)2}{k}}.$$

Анализ уравнений для определения α и β показывает, что система (5) имеет единственное решение. Случай $k=1$ более прост, так как при этом $\xi_2 = a$, что значительно упрощает вычисления. Процесс нахождения параметров A, B, C дробно-рациональной аппроксимации (3) аналогичен описанному выше.

Полученные нами зависимости для $A = A(a)$, $B = B(a)$, $C = C(a)$ в выражениях (3) и (4) сведены в таблицу. Помимо этого, в таблице указаны величина наибольшего уклонения $L = \max\limits_x |\varepsilon(x)|$ и точки

Параметр	Дробно-рациональная аппроксимация			Экспоненциальная аппроксимация		
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
A	$-a/6$	$-a^2 \cdot 0,114645$	$-a^3 \cdot 0,097451$	$-a \cdot 0,105061$	$-a^2 \cdot 0,045994$	$-a^3 \cdot 0,028898$
B	$4 \cdot a^2/9$	$a^3 \cdot 0,267357$	$a^4 \cdot 0,190698$	$a \cdot 1,210122$	$a^2 \cdot 1,091988$	$a^3 \cdot 1,057796$
C	$a/3$	$a \cdot 0,217489$	$a \cdot 0,159593$	$1,750788/a$	$2,653357/a$	$3,618674/a$
ξ_0	0	0	0	0	0	0
ξ_1	$a/3$	$a \cdot 0,188341$	$a \cdot 0,130305$	$a \cdot 0,428829$	$a \cdot 0,246238$	$a \cdot 0,170967$
ξ_2	a	$a \cdot 0,891258$	$a \cdot 0,710102$	a	$a \cdot 0,846840$	$a \cdot 0,654142$
ξ_3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
L	$a/6$	$a^2 \cdot 0,114645$	$a^3 \cdot 0,097451$	$a \cdot 0,105061$	$a^2 \cdot 0,045994$	$a^3 \cdot 0,028898$

ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3, в которых достигается наибольшее значение ошибки аппроксимации. При таком подходе экспоненциальная аппроксимация имеет вид

$$f(x) \approx \sum_{1}^{N-1} \widetilde{R}_i \left(A_i + B_i e^{-C_i x}\right) + \widetilde{P}_k(x). \tag{6}$$

Если наличие полиномиального члена в аппроксимирующем выражении нежелательно, то на $\pi_k(x)$ можно наложить ограничения $\pi_k^{(i)}(x_N) = 0 (i = 1 \div k)$, приводящие к $\widetilde{P}_k(x) = \mathrm{const}$. Подобные ограничения необходимы и в случае обобщенной полиномиальной аппроксимации.

IV. Двухэтапные методы могут быть с успехом использованы для обработки экспериментальных данных. Для этого на первом этапе следует построить сглаживающую «сплайн»-функцию, а затем обычным способом перейти от нее к искомой функциональной зависимости из рассматриваемых классов (полиномиальной, экспоненциальной или дробно-рациональной). Методы построения сглаживающих «сплайн»-функций рассматриваются в ряде работ, например в [6]. Однако используемые при этом критерии качества сглаживания, естественно, плохо согласуются с двухэтапными методами.

В условиях использования двухэтапных методов целесообразен, по нашему мнению, следующий критерий. Если сглаживание функции $f_t(x)$, заданной таблично, выполняется по критерию ρ, то параметры «сплайн»-функции нужно выбирать из условия минимума выражения

$$\rho\left(f_t(x),\ \pi_k(x)\right) + \gamma \sum_{1}^{N-1} |R_i| L_i, \tag{7}$$

где L_i представляет собой ошибку аппроксимации компонент (вида $(x-x_i)^{k-1}|x-x_i|$ или $(x_i-x)_+^k$)«сплайн»-функции на втором этапе метода.

Эта ошибка, например, для экспоненциального случая и $k=3$ имеет вид (см. таблицу) $L(a)=0{,}028898\cdot a^3$. Коэффициент γ согласует точность обоих этапов метода. При сглаживании по равномерному критерию этот коэффициент равен единице, в остальных случаях его выбор затруднен и носит в основном эмпирический характер. Помимо этого, зависимость $L(a)$ не всегда имеет такой простой вид, как при дробно-рациональной или экспоненциальной аппроксимации, что хорошо иллюстрируется графиками $L(a)$ для случая многочленной аппроксимации (рис. 3).

Из всего сказанного следует, что приведенный критерий носит ориентировочный характер и потому может быть эффективно использован лишь при ручных и полуавтоматических вычислениях. На наш взгляд, полуавтоматический режим вычислений наиболее естественно реализуется в графических системах оперативного взаимодействия человека с ЭЦВМ, в которых человек является источником неформальных решений. Решая задачу обработки экспериментальных данных, человек производит подбор параметров «сплайн»-функции в соответствии с недостаточно определенным критерием. Здесь существенную роль играет наглядность процесса «сплайн»-аппроксимации. Исключительно важное значение имеет также знакомство человека-оператора с графиками ошибок $L(a)$, которые позволяют произвести рациональный выбор точек $\{x_i\}_1^{N-1}$. Например, в случае полиномиальной аппроксимации эти точки следует располагать в окрестности локальных минимумов функции $L(a)$, что обеспечит малую величину второго слагаемого в критерии (7).

Рассмотренные в работе двухэтапные методы позволяют построить ряд графоаналитических методов, удобных для ручного и полуавтоматического построения линейных и ряда нелинейных аппроксимирующих зависимостей. При этом нелинейно входящие параметры приобретают отчетливую геометрическую трактовку, что облегчает их приближенное нахождение. Таким образом, двухэтапные методы оказываются весьма полезными при определении начальных значений параметров аппроксимирующих выражений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Я. Ремез. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев, Изд-во АН УССР, 1957.
2. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.
3. Ю. С. Завьялов. Интерполирование кубическими многозвенниками.— В сб. «Вычислительные системы», вып. 38. Новосибирск, «Наука», 1970.
4. D. V. Ionescu. Introduction á la théorie des «fonctions spline».— Acta math. Acad. Sci. Hungar, 1970, 21.
5. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1952. Изд-во иностр. лит., 1958.
6. Ю. С. Завьялов. Экстремальное свойство кубических многозвенников и задача сглаживания.— в сб. «Вычислительные системы», вып. 42. Новосибирск, «Наука», 1970.

Поступила в редакцию 3 октября 1972 г.