ца $(m \times m)$. Первая строка первого слагаемого матричного уравнения (11) является статистикой, отображающей множество значений случайного вектора $X_{\cdot|i} = (X_{i-1}, \ldots, X_{i-m})$ на множество значений оценки случайной величины $X_{i+\theta}$. Оптимальность статистически вытекает из ортогональности в H подпространств, содержащих векторы $X_{i-1}, \ldots, X_{i-m}$ и векторы $\Xi_{i+\theta}, \ldots, \Xi_i$. Критерий качества ее равен

$$E\left[X_{i+\theta} - \hat{X}_{i+\theta}\right]^2 = E\left[\sum_{k=0}^{\theta} \prod_{j=0}^{k} B_{i+\theta-j+1}\, \Xi_{\cdot|i+\theta-k}\right]^2.$$

Обозначим левый верхний элемент матрицы $\prod_{j=0}^{k} B_{i+\theta-j+1}$ через $\beta_{11/i+\theta-k+1}$. Учитывая ортогональность в H векторов $\Xi_{i+\theta}, \ldots, \Xi_i$ выражение для критерия качества можно записать в виде

$$E\left[X_{i+\theta} - \hat{X}_{i+\theta}\right]^2 = \sum_{k=0}^{\theta} \beta^2_{11/i+\theta-k+1} \|\Xi_{i+\theta-k}\|^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Лэнинг. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
3. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию 5 сентября 1972 г.

УДК 681.2.08

А. Д. БОЛЫЧЕВЦЕВ

(Харьков)

ОПТИМАЛЬНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КВАНТОВАННЫХ ПО УРОВНЮ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Рассматриваемая задача относится к проблеме квантования и дискретизации непрерывных зависимостей [1—4]. Как и в [1], предполагается, что от измерительной системы к потребителю информации в дискретные моменты времени поступает квантованный по уровню поток отсчетов измеряемого сигнала. По этим данным, используя различные интерполяционные оценки, потребитель информации восстанавливает исходный сигнал. При этом появляется некоторая погрешность — методическая ошибка,— характерная для дискретного измерения. При заданной цене делений измерительного прибора уменьшение интервалов дискретизации снижает эту погрешность, однако усложняет и удорожает процесс измерения. Так возникает задача оптимального согласования интерполяционные оценки, потребитель информации восстанавливает

В статье дается приближенное решение этой задачи для случая ступенчатой интерполяции. Метод решения основан на вероятностных оценках течения во времени измеряемого случайного процесса. Предполагается, что процесс не содержит регулярной (неслучайной) составляющей; при получении численных оценок ему приписываются свойства нормальности и непрерывной дифференцируемости.

Вероятностные показатели качества измерения. Постановка задачи. На рис. 1, *а* показана ступенчатая кривая $x_{-}(t)$, полученная путем равномерного квантования с величиной квант Δx некоторой реализации $x(t)$ случайного стационарного процесса $X(t)$. Уровень k, до которого округляются значения реализации, называют уровнем квантования,

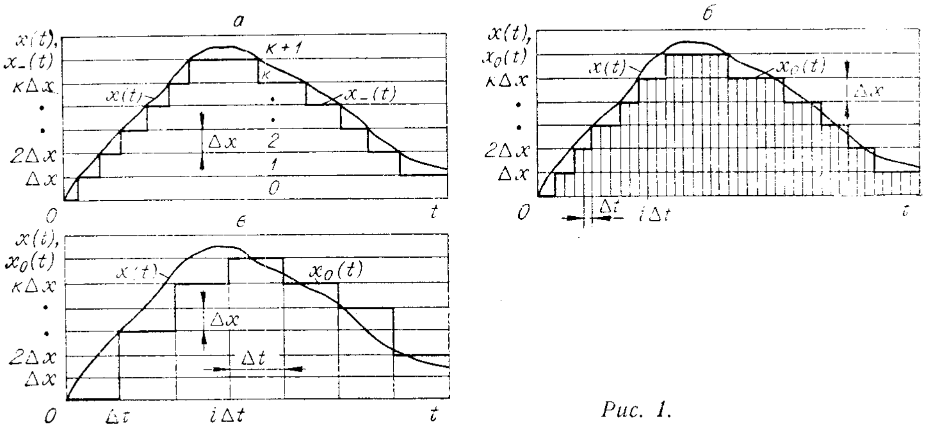

Рис. 1.

а область, заключенную между смежными уровнями,— зоной квантования, или квант-зоной. Если исходный случайный процесс подлежит дискретному измерению цифровым прибором, имеющим цену делений (квант отсчета), равной Δx, и периодичность отсчетов (шаг временной дискретизации), равной Δt, то применительно к рассматриваемой реализации $x(t)$ дискретные отсчеты будут появляться в моменты времени $i\Delta t$, а величины отсчетов окажутся равными $x_{-}(i\Delta t)$, $i=0, 1,\ldots$ Без нарушения общности рассмотрения начало отсчета времени t отнесено к моменту выполнения первой измерительной операции.

Пусть для восстановления кривой $x(t)$ по полученным дискретным отсчетам применяется ступенчатая интерполяция, т. е. на промежуток времени между двумя соседними измерительными операциями распространяется результат более ранней из них. Если ступенчатую функцию, аппроксимирующую исходную кривую $x(t)$, обозначить $x_0(t)$ (см. рис. 1, *б*, *в*), то разность $\Delta(t)=x(t)-x_0(t)$ определяет текущую ошибку метода.

Качественно ясно, что слишком заниженный шаг дискретизации неэкономичен, так как приводит к сериям одинаковых отсчетов, т. е. неоправданно частым подключениям измерительного прибора к измеряемому процессу. Наоборот, чрезмерно завышенный шаг дискретизации приводит к пропуску известного числа квант-зон, что резко увеличивает погрешность аппроксимации (методическую ошибку $\Delta(t)$) и даже может свести на нет результаты дискретного измерения.

Очевидно, для получения рационального шага дискретизации следует найти компромисс между этими двумя крайностями. Иначе говоря, необходимо найти шаг равномерной дискретизации Δt измеряемого процесса по возможности большим, но таким, при котором прохождение процессом отдельных квант-зон в интервале между измерительными операциями происходило бы достаточно редко.

Идеальным было бы такое решение, при котором результаты произвольной пары смежных отсчетов отличались бы друг от друга на один квант (аналогично тому, как это имеет место при цифровом измерении со следящим уравновешиванием). В этом случае в рамках естественного допуска на погрешность измерения, задаваемого зоной нечувствительности — ценой делений — цифрового прибора, моменты отсчетов оказались бы максимально разнесенными во времени. Разумеется, такое решение недостижимо в условиях равномерной дискретизации. Однако можно попытаться найти решение, при котором описанная ситуация — отличие результатов пары смежных отсчетов на один квант — встречалась бы наиболее часто.

Чтобы дать четкую количественную формулировку данной задачи, удобно ввести в рассмотрение вероятностные оценки качества отдельных измерительных операций и дискретного измерения в целом.

Под вероятностным показателем качества какой-либо измерительной операции понимается вероятность того, что результат этой измерительной операции отличается от результата предшествующей ей операции на один квант.

Аналогично под вероятностным показателем качества дискретного измерения понимается вероятность отличия результатов произвольной пары соседних измерительных операций на один квант. Последний показатель, являющийся усреднением предыдущего показателя по всей совокупности дискретных отсчетов, может быть выбран в качестве критерия оптимальности измерительной системы [5].

В этих терминах рассматриваемую задачу можно сформулировать так: исходя из имеющихся априорных данных (каких именно, выясняется в дальнейшем) о вероятностных свойствах случайного процесса, подлежащего дискретному измерению, необходимо подобрать такой интервал между измерительными операциями, при котором выбранный критерий оптимальности достигает экстремума.

Точное численное решение задачи довольно трудоемко. Однако несложно получить приемлемые приближения, рассмотрев наиболее характерный в измерительной практике случай малых интервалов квантования Δx. Порядок малости уточняется в процессе решения задачи.

Общие зависимости. Пусть результат некоторой произвольно взятой $(i-1)$-й операции измерения соответствует k-му уровню квантования. Тогда вероятностный показатель качества i-й измерительной операции $p_{ik}(\Delta t)$* найдем как сумму условных вероятностей

$$p_k(\Delta t) = P\{X(t_i) \in [x_{k-1}, x_k]/X(t_{i-1}) \in [x_k, x_{k+1}]\} + \\ + P\{X(t_i) \in [x_{k+1}, x_{k+2}]/X(t_{i-1}) \in [x_k, x_{k+1}]\},$$

которые, будучи выраженными через одно- и двухмерную плотности распределения $f(x)$ и $f(x, y, \Delta t)$ случайного процесса, приводят к зависимости

$$p_k(\Delta t) = \frac{1}{\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} dx \left[\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y, \Delta t)\,dy + \int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} f(x, y, \Delta t)\,dy \right]. \quad (1)$$

Для упрощения последующего анализа удобно ввести обозначение

$$\gamma_1(x, \Delta t) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(y|x, \Delta t)\,dy + \int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} f(y|x, \Delta t)\,dy, \quad (2)$$

---

* В дальнейшем сохранен только индекс k, поскольку для стационарного случая номер i роли не играет.

где $f(y|x, \Delta t) = \frac{f(y, x, \Delta t)}{f(x)}$ —условная плотность вероятности, и переписать формулу (1) в виде

$$p_k(\Delta t) = \frac{1}{\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, \gamma_1(x, \Delta t)\, dx. \tag{3}$$

Переход от вероятностного показателя качества отдельных измерительных операций $p_k(\Delta t)$ к вероятностному показателю качества дискретного измерения в целом $p(\Delta t)$ осуществляется путем усреднения результатов (1) или (3) по всем номерам k, что дает

$$p(\Delta t) = \sum_k \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, \gamma_1(x, \Delta t)\, dt. \tag{4}$$

Нормальный случай. Анализ функции γ. В дальнейшем предполагается, что измеряемый процесс нормален, имеет непрерывно дифференцируемые реализации и нулевое математическое ожидание. Последнее означает, что индекс k может принимать как положительные, так и отрицательные целочисленные значения.

Условная плотность вероятности $f(y|x, \Delta t)$ стационарного нормально распределенного процесса определяется выражением [6]

$$f(y|x, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho \exp\{-[\rho(y - xR)]^2\}, \tag{5}$$

где $\rho = 1/\sigma\sqrt{2(1-R^2)}$; σ^2 — дисперсия; $R = R(\Delta t)$ — нормированная корреляционная функция процесса.

Выполнив, согласно записи (2), интегрирование функции (5) по y, нетрудно подсчитать функцию $\gamma_1(x, \Delta t)$:

$$2\gamma_1(x, \Delta t) = 2\gamma(\varkappa+\varepsilon, z) =$$
$$= H(\varkappa+\varepsilon+2z) - H(\varkappa+\varepsilon+z) + H(\varkappa+\varepsilon) - H(\varkappa+\varepsilon-z). \tag{6}$$

Здесь $H(\alpha)$ — интеграл вероятности вида

$$H(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\alpha} e^{-t^2}\, dt; \tag{7}$$

параметры $\varkappa$, z и ε равны соответственно:

$$\varkappa = \rho(x_k - x); \tag{8}$$

$$z = \rho\Delta x = \Delta x/\sigma\sqrt{2(1-R^2)}; \tag{9}$$

$$\varepsilon = \rho(1-R)x. \tag{10}$$

Ниже будет показано, что при малых квантах Δx и в пределах разумных значений номера k величины ε несущественно влияют на конечный результат. Поэтому представляет интерес проанализировать зависимость $\gamma(\varkappa, z)$ при $\varkappa \in [-z, 0]$, что соответствует отрезку $[x_k, x_{k+1}]$ интегрирования по x [формулы (3) и (4)]

$$2\gamma(\varkappa, z) = H(\varkappa+2z) - H(\varkappa+z) + H(\varkappa) - H(\varkappa-z). \tag{11}$$

Зависимость $\gamma(\varkappa, z)$ как функция параметра $\varkappa$ симметрична относительно вертикали $\varkappa = -z/2$ и имеет в точке $\varkappa = -z/2$ экстремум —

максимум при $z \leqslant 0{,}74$ и минимум при $z > 0{,}74$. Величина экстремума равна

$$\gamma_0(z) = \gamma\left(-\frac{z}{2}, z\right) = H\left(\frac{3}{2}z\right) - H\left(\frac{z}{2}\right). \tag{12}$$

В граничных точках анализируемого участка: $\varkappa = -z$ и $\varkappa = 0$ — значения функции одинаковы:

$$\gamma(-z, z) = \gamma(0, z) = \frac{1}{2}H(2z). \tag{13}$$

Примечательна такая особенность функции $\gamma(\varkappa, z)$. При $z \leqslant 0{,}74$ функция всюду выпукла и в то же время практически не зависит от $\varkappa$: ее максимальное относительное отклонение от экстремального значения соответствует граничным точкам ($\varkappa = -z$ и $\varkappa = 0$) при $z = 0{,}5$ и составляет величину около 3% (рис. 2). Это свидетельствует о том, что максимум $\gamma(\varkappa, z)$ довольно пологий. Анализ показывает, что и в точке минимума ($z > 0{,}74$) $\gamma(\varkappa, z)$ также имеет малую крутизну. Учитывая сказанное, при величинах $z \leqslant 0{,}9$, для которых разброс ординат $\gamma(\varkappa, z)$ ($\varkappa \in [-z, 0]$; z фиксировано) несуществен, экстремальное значение функции $\gamma(\varkappa, z)$ целесообразно принять за ее расчетное значение на анализируемом участке.

Расчетные соотношения. Считая, что в интервале интегрирования функция $\gamma_1(x, \Delta t)$ постоянна и равна своему экстремальному значению, и пренебрегая пока ошибкой, вносимой величиной ε, с точностью до погрешности, не превышающей δ (см. рис. 2), формулу (3) можно переписать:

$$p_k(\Delta t) = p(\Delta t) = \gamma_0(z) = H\left(\frac{3}{2}z\right) - H\left(\frac{z}{2}\right), \tag{14}$$

где $H(\alpha)$ и z выражаются соотношениями (7) и (9).

Более тонкий анализ показывает, что действительная погрешность δ' соотношения (14), обусловленная непостоянством функции $\gamma(\varkappa, z)$ на интегрируемом участке, в несколько раз меньше δ. Так, при $z = 0{,}5$ имеем $\delta \approx 3\%$, в то время как $\delta' \approx 1\%$; при $z = 0{,}74$ $\delta = 0{,}5\%$, а $\delta' = 0{,}1\%$; при $z = 0{,}8$ $\delta = 1{,}3\%$, а $\delta' = 0{,}5\%$ и т. д.

Найденное выражение (14) достаточно компактное и простое и может быть принято в качестве инженерного расчетного соотношения вероятностного показателя качества в широкой окрестности точки оптимума. При его использовании необходимо располагать таблицами интеграла вероятности типа (7) [7] либо типа

$$\Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt, \tag{15}$$

имеющимися, в частности, в распространенном среди инженеров математическом справочнике [8]. Выраженную через интеграл вероятности второго типа формулу (14) перепишем так:

$$p_k(\Delta t) = p(\Delta t) = \Phi\left(\frac{3}{2}z_1\right) - \Phi\left(\frac{z_1}{2}\right), \tag{16}$$

где

$$z_1 = \sqrt{2}\,z = \frac{\Delta x}{\sigma\sqrt{1 - R^2}}. \tag{17}$$

Характерная особенность выражения (14) (или аналогичного ему (16)) — независимость от уровня квантования k. Это показывает, как и отмечено в формулах, что с одинаковым основанием найденные выражения могут быть приняты за расчетные соотношения критерия оптимальности измерительной системы. Данный результат следует непосредственно и из исходной формулы (4).

В ряде случаев более предпочтительной может оказаться простая запись расчетного соотношения, получаемая из исходного выражения (3) путем формального применения теоремы о среднем:

$$p_k(\Delta t) = p(\Delta t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z e^{-z^2}. \tag{18}$$

В справедливости этой записи наиболее просто убедиться, сопоставляя функции (14) и (18) на расчетном участке (рис. 3).

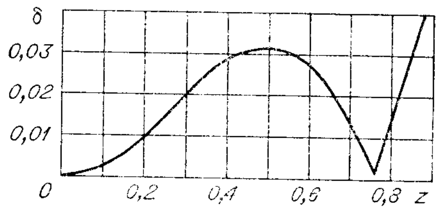

Рис. 2.

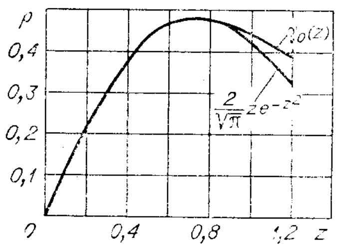

Рис. 3.

Оптимальный шаг дискретизации. Максимум функции (14) соответствует точке $z_0 = 0{,}74$. Приравняв этому значению правую часть (9), легко найти зависимость, связывающую величину кванта Δx и среднеквадратичное отклонение процесса σ со значением его нормированной корреляционной функции в точке оптимума

$$R(\Delta t_0) = \sqrt{1 - 0{,}9\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^2}. \tag{19}$$

Обращает на себя внимание слабая выраженность максимума функции $\gamma_0(z)$. При отклонении аргумента z в окрестности точки оптимума на $\pm 10\%$ функция изменяется менее чем на 1%. Иными словами, существует некоторый интервал примерно равноценных значений шага дискретизации Δt. К этому интервалу принадлежит и точка экстремума $\Delta t_0'$ зависимости (18), соответствующая $z_0' = 1/\sqrt{2} = 0{,}71$. Отклонения результатов $p(\Delta t)$, вычисленных для этой точки по формулам (14) и (18), отличаются друг от друга менее чем на 0,2%.

Приравняв к z_0' правую часть (9), найдем

$$R(\Delta t_0') = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^2}. \tag{20}$$

Интересно отметить, что это выражение, переписанное в виде

$$R(\Delta t_0') \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^2,$$

по своей структуре совпадает с результатом [9], дающим величину необходимого шага дискретности, удовлетворяющего заданному значению среднеквадратичной погрешности очередного отсчета. Практическая независимость этого результата от начального значения измеряемого параметра (предыдущего отсчета) отмечалась в [4].

Формула (19) позволяет непосредственно на графике корреляционной функции процесса получить оптимальное значение шага дискретности Δt_0. Для практических расчетов более удобно использовать простую аналитическую запись, к которой легко перейти, разложив обе части равенства (19) в ряд Маклорена с сохранением в нем первых двух значащих членов:

$$\Delta t_0 = 0{,}95 \frac{\Delta x}{\omega\sigma}, \tag{21}$$

где $\omega = \sqrt{-\left.\frac{d^2 R(t)}{dt^2}\right|_{t=0}}$. Малость интервала Δx гарантирует высокую точность этого приближения. Аналогичное представление может быть дано и для формулы (20):

$$\Delta t_0' = \frac{\Delta x}{\omega\sigma}. \tag{22}$$

При получении соотношений (20) и (21), естественно, предполагается, что измеряемый процесс имеет непрерывно дифференцируемые реализации [10, 11]. Для предыдущих выражений достаточно одной непрерывности.

Полученные результаты позволяют сделать некоторые выводы, относящиеся к дискретному измерению непрерывных случайных процессов рассматриваемого класса:

1) для вычисления оптимального шага равномерной дискретизации достаточно знать величину интервала квантования Δx и корреляционную функцию $K(\Delta t) = \sigma^2 R(\Delta t)$ измеряемого процесса;

2) при оперативных измерениях с запоминанием результата только последней отсчетной операции оптимальная длительность предстоящего шага опроса практически не зависит от этого результата и равна оптимальному шагу равномерной дискретизации наблюдаемого процесса;

3) в окрестности точки оптимума существует некоторый достаточно широкий интервал примерно равноценных значений шага дискретности Δt. Так, в пределах $\pm 10\%$-ных отклонений Δt от оптимального значения Δt_0 изменения вероятностного показателя качества $p(\Delta t)$ не превышают 1%.

О расчетной погрешности. Относительная погрешность δ_p расчетного соотношения (14) [или (16)] включает в себя оцененную выше погрешность δ и ошибку δ_ε, полученную за счет пренебрежения в соотношении (6) величиной ε:

$$\delta_p = \delta + \delta_\varepsilon. \tag{23}$$

Величина ε может быть представлена в таком виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_k - (1-R)\varkappa, \tag{24}$$

где ε_k не зависит от $\varkappa$:

$$\varepsilon_k = \rho\,(1-R) k \Delta x = kz\,(1-R). \tag{25}$$

Случай $k=0$ и $k=-1$. Если $k=0$, то $\gamma(\varkappa+\varepsilon) = \gamma(R\varkappa)$*. Если функцию $\gamma(\varkappa)$ назвать идеальной зависимостью, то данная реальная зависимость $\gamma(\varkappa+\varepsilon)$ может быть получена из идеальной путем изменения в R раз (растяжения) масштаба по оси абсцисс $\varkappa$. Если $k=-1$, то $\gamma(\varkappa+\varepsilon) = \gamma[R\varkappa - z(1-R)]$. Эта зависимость может быть получена из идеальной путем изменения в R раз масштаба по оси абсцисс $\varkappa$ и смещения вправо, так чтобы $\gamma(-z+\varepsilon) = \gamma(-z)$.

Интервал интегрирования по $\varkappa$ остался прежним. Отсюда понятно, что при $k=0$ и $k=-1$, по крайней мере с точностью до относительной погрешности δ, формула (14) справедлива в любой точке z и для любых

* Здесь и ниже для упрощения символической записи функции $\gamma(\varkappa, z)$ параметр z опускается.

значений Δx. Практическое ее использование, естественно, ограничено интервалом малых значений δ, где $z<0{,}9$, что соответствует $\Delta t > R^{-1} \times \times \sqrt{1-0{,}6\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^2}$ (R^{-1}) — функция, обратная нормированной корреляционной функции измеряемого процесса).

Полезно заметить, что всегда $z \geqslant \frac{\Delta x}{\sqrt{2}\sigma}$ [см. (9)]. Поэтому при $\Delta x \geqslant 1{,}05\,\sigma$ экстремум функции $\gamma_0(z)$ выходит из области физически возможных z, и своего наибольшего значения вероятностный показатель качества достигает в граничной точке $z=\frac{\Delta x}{\sqrt{2}\sigma}$, что соответствует $R(\Delta t)=0$, или $\Delta t=\infty$.

Случай произвольных k. Разложение $\gamma(\varkappa+\varepsilon)$ в ряд по степеням ε при $\varkappa=-z/2$ дает

$$\gamma\left(-\frac{z}{2}+\varepsilon\right)=\gamma\left(-\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{2}\gamma''\left(-\frac{z}{2}\right)\varepsilon^2+\ldots \tag{26}$$

Вторым членом этого разложения можно оценить погрешность, вносимую величиной ε. В относительных единицах

$$\delta_\varepsilon=\frac{1}{2}\left|\frac{\gamma''\left(-\frac{z}{2}\right)}{\gamma\left(-\frac{z}{2}\right)}\right|\varepsilon^2<\varepsilon^2, \tag{27}$$

причем в величине ε достаточно учесть лишь $\varepsilon_k=\frac{k}{\sqrt{2}}\frac{\Delta x}{\sigma}\sqrt{\frac{1-R}{1+R}}$, поскольку ее вторая составляющая $(1-R)\varkappa$ не вносит дополнения к уже учтенной погрешности δ.

Оценка ε_k^2 — это грубая оценка погрешности δ_ε, приближающаяся к истинной при малых z. Своего наибольшего значения она достигает при $R=0$, причем малость погрешности обеспечивается лишь в узкой зоне, где $k\frac{\Delta x}{\sigma}\ll 1$.

С ростом z область применимости соотношения (14) расширяется, а его погрешность падает. Так, если $z=0{,}25$, то $\varepsilon_k^2=k^2\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^2$; если $z=0{,}5$, то $\varepsilon_k^2=0{,}25k^2\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^2$. Отсюда видно, что для случая $\frac{\Delta x}{\sigma}\ll 1$ погрешности малы в пределах разумных значений номера k. Усреднение этих величин по всем номерам k дает соответственно:

$$\overline{\varepsilon_k^2}=\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^2 \quad \text{и} \quad \overline{\varepsilon_k^2}=0{,}25\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^2, \tag{28}$$

из чего следует, что условие $\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)\ll 1$ (достаточно меньше 0,1) обеспечивает малость погрешности δ_ε в широком интервале значений z.

В точке $z=0{,}74$, интерпретируемой здесь как точка оптимума, $\gamma''\left(-\frac{z}{2}\right)=0$ и, поскольку $\gamma'''\left(-\frac{z}{2}\right)\equiv 0$, погрешность δ_ε оценивается через четвертую производную функции $\gamma(\varkappa)$

$$\delta_\varepsilon=\frac{1}{24}\left|\frac{\gamma^{(\mathrm{IV})}\left(-\frac{z}{2}\right)}{\gamma\left(-\frac{z}{2}\right)}\right|\varepsilon_k^4=0{,}27\varepsilon_k^4=0{,}0035k^4\left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^8. \tag{29}$$

При условии $\frac{\Delta x}{\sigma} \ll 1$ погрешность пренебрежимо мала вплоть до весьма высоких значений уровня x_k.

Усреднение погрешности (29) по всем номерам k дает

$$\overline{\delta}_\varepsilon = 0{,}01 \left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right)^4. \tag{30}$$

Отсюда следует, что уже при $\frac{\Delta x}{\sigma} < 0{,}4$—$0{,}5$ расчетную ошибку оптимального значения критерия качества измерительной системы можно оценить одной погрешностью δ, примерно равной 0,5%.

ВЫВОДЫ

Введенные в рассмотрение вероятностные показатели качества отдельных измерительных операций и дискретного измерения в целом позволили поставить и численно решить задачу оптимального согласования интервалов квантования и дискретизации непрерывных случайных нормально распределенных стационарных процессов в случае их ступенчатого восстановления по совокупности дискретных отсчетов.

В разумных пределах изменения уровня квантования k оба вероятностных показателя качества практически совпадают. Их расчетные величины определяются соотношением (14) [или (18)]. Отклонение расчетного оптимума от его истинного значения менее 0,5%.

Оптимальный шаг равномерной дискретизации может быть найден на графике корреляционной функции измеряемого процесса, согласно зависимости (19), либо подсчитан аналитически, согласно формуле (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Б. Карандеев, М. П. Цапенко. Вопросы теории и практики измерительных информационных систем.— В кн. «Кибернетику — на службу коммунизму», т. 5. М., «Энергия», 1967.
2. К. Маркюс. Дискретизация и квантование. М., «Энергия», 1969.
3. В. М. Ефимов. Квантование по времени при измерении и контроле. М., «Энергия», 1969.
4. А. С. Немировский. Вероятностные методы в измерительной технике. М., Изд-во стандартов, 1964.
5. А. И. Васильев, Ю. П. Дробышев, А. Ф. Котюк. Оптимизация процесса измерения.— Измерительная техника, 1967, № 12.
6. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.
7. Таблицы вероятностных функций, т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958.
8. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М., «Наука», 1967.
9. Э. Л. Ицкович. Определение необходимой частоты измерений при дискретном контроле.— Автоматика и телемеханика, 1961, № 2.
10. В. И. Тихонов. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970.
11. Г. Крамер, М. Лидбеттер. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969.

Поступила в редакцию 13 апреля 1971 г., окончательный вариант — 12 мая 1972 г.