УДК 681.2.082/083.519.2

Б. А. МОРЯКИН
(Новосибирск)

МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методы решения задач сглаживания, фильтрации и предсказания зависят от классов случайных процессов, которым принадлежат сигналы и ошибки. Наиболее полно изучены эти задачи для стационарных [1] и параметрических [2] сигналов. Классы стационарных и параметрических случайных процессов не пересекаются, и исторически методы их обработки развивались параллельно и независимо. Использование обобщенных моделей случайных процессов, включающих как частный случай стационарные и параметрические процессы, позволяет обобщить методы обработки на более широкий класс случайных процессов.

Методы получения статистической модели случайного процесса в настоящее время развиты недостаточно для приложений, и в практике обработки часто принимают гипотезы стационарности или параметричности сигнала без попыток их обоснования. Так как алгоритмы обработки оптимизируются для случайных процессов, свойства которых определены моделью, то расхождение статистических характеристик реализаций с моделью приводит к ухудшению качества обработки. В некоторых случаях, например при применении метода наименьших квадратов для непараметрических сигналов, качество оценок может оказаться хуже, чем у необработанных данных.

Ниже рассматривается модель случайного процесса и условия, при которых случайный процесс является параметрическим или стационарным. Задача идентификации случайного процесса, т. е. определение параметров модели, решается при исходной информации о процессе, задаваемой множеством его реализаций.

Рассмотрим случайную величину X и систему статистически связанных с ней случайных величин $(X_1, \ldots, X_m)$, принимающих значения в вещественных пространствах соответственно X и X_m. Статистикой случайной величины X, определенной на множестве X_m называется закон отображения T множества X_m на множество значений оценок случайной величины X, т. е.

$$\hat{x} = T(x_1, \ldots, x_m).$$

Будем рассматривать среднеквадратичный критерий качества статистики

$$\min_{T \in F} E\,[x - T(x_1, \ldots, x_m)]^2. \qquad (1)$$

Статистика, удовлетворяющая критерию (1), очевидно, совпадает с условным математическим ожиданием

$$T(x_1, \ldots, x_m) \equiv EX/x_1, \ldots, x_m, \qquad (2)$$

если класс функций F, в котором выбирается статистика, содержит функцию $EX/x_1, \ldots, x_m$. В противном случае равенство (2) не выполняется.

Пусть F — класс линейных функций. Тогда критерий качества оптимальной линейной статистики равен

$$q = \min_{T \in F} E\,[x - T\,(x_1, \ldots, x_m)]^2 = E_{X_m} \sigma^2_{x/x_1, \ldots, x_m} +$$
$$+ E_{X_m} [T\,(x_1, \ldots, x_m) - EX/x_1, \ldots, x_m]^2.$$

Второе слагаемое есть величина потерь вследствие ограничения класса статистик.

Случайную величину X можно представить как сумму двух случайных величин

$$X = T\,(X_1, \ldots, X_m) + \Xi, \tag{2'}$$

где Ξ — ошибка оценивания случайной величины X статистикой T. Можно показать, что если линейная неоднородная статистика T удовлетворяет условию (1), то случайная величина Ξ некоррелирована с величинами $X_1, \ldots, X_m$, и ее математическое ожидание равно нулю, т. е. статистика является несмещенной. Справедливо и обратное утверждение: если случайная величина Ξ имеет математическое ожидание, равное нулю, и некоррелирована со случайными величинами $X_1, \ldots, X_m$, то линейная статистика T является оптимальной по критерию (1) в классе линейных неоднородных функций. Для доказательства введем представление случайных величин в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением

$$(X_1, X_2) = E\,[X_1 X_2].$$

Случайная величина в H представляется вектором с нормой $\|X\| = \sqrt{EX^2}$; косинус угла между векторами X_1 и X_2 равен

$$\cos\left(X_1 \hat{} X_2\right) = \frac{E\,[X_1 X_2]}{\|X_1\|\,\|X_2\|}.$$

Из равенств $E[\Xi] = 0$, $(\Xi, X_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ следует ортогональность Ξ подпространству H_{m+1}, содержащему векторы $(1, X_1, \ldots, X_m)$, и из теоремы об ортогональном проектировании [3] следует, что норма $\|\Xi\|$ минимальна.

Синтез оптимальной линейной статистики $T(x_1, \ldots, x_m) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j$ сводится к определению экстремальных значений параметров $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$, минимизирующих норму $\|\Xi\|$. Если статистические свойства системы случайных величин $(X, X_1, \ldots, X_m)$ заданы их совместным распределением, то экстремальные значения параметров $\beta_0, \ldots, \beta_m$ получаются из условия $\Xi \perp H_{m+1}$ и равны

$$\beta = G^{-1} c,$$

где $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_m)$ — вектор-столбец; G — матрица Грама для системы векторов $(1, X_1, \ldots, X_m) \in H_{m+1}$ со скалярным произведением (3); $c = ((X, 1), (X, X_1), \ldots, (X, X_m))$ — вектор скалярных произведений.

Если совместное распределение случайных величин $(x, x_1, \ldots, x_m)$ неизвестно, но задан ансамбль их реализаций, то оценки экстремальных значений параметров статистики и ее критерия качества могут быть получены непосредственно, без вычисления закона распределения. Так как средние арифметические

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i, \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{si} x_{ki}$$

при увеличении N стремятся к математическим ожиданиям EX, $E[X_s X_k]$, то оценка вектора β равна

$$\hat{\beta} = \hat{G}^{-1}\hat{c},$$

где $\hat{G}$ — матрица Грама в пространстве реализаций H векторов

$$x = (x_1, \ldots, x_N),\ x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1N}), \ldots, x_m = (x_{m1}, \ldots, x_{mN})$$

со скалярным произведением

$$(x_s, x_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{si} x_{ki};$$

c — вектор скалярных произведений в H

$$\hat{c}((x, x_1), \ldots, (x, x_m)).$$

Эта оценка является несмещенной. Несмещенная оценка нормы равна

$$\|\hat{\Xi}\| = \sqrt{\frac{|\hat{G}(x, x_1, \ldots, x_m)|}{|\hat{G}(x_1, \ldots, x_m)|}},$$

где $|G(x, x_1, \ldots, x_m)|$ — определитель матрицы Грама для системы векторов $X, X_1, \ldots, X_m$ в H.

Перейдем, далее, к вопросу о синтезе оптимальной статистики для системы функций одного аргумента $X(t)$, $X_1(t)$, $\ldots$, $X_m(t)$. Требуется найти статистику T, отображающую множество значений функций $X_1(t)$, $\ldots$, $X_m(t)$ на множество значений оценки $\hat{X}(t)$ при одинаковых значениях аргумента $\hat{X}(t) = T(X_1(t), \ldots, X_m(t))$. Отметим, что приведенная статистика позволяет использовать прошлые значения функции $X(t)$ или $X_s(t)$, $(s = 1, \ldots, m)$. Вводя оператор сдвига $DX(t) = X(t - \Delta t)$ и включая полученную функцию в набор функций $X_1(t)$, $\ldots$, $X_m(t)$, можно исследовать зависимость будущих значений функции от прошлых.

При фиксированных значениях t задача синтеза оптимальной линейной статистики аналогична предыдущей. При различных значениях t в общем случае экстремальные значения параметров $\beta_0, \ldots, \beta_m$ и нормы $\|\Xi\|$ различны. Вводя индекс i для $t = t_i$, запишем равенство (2′) в виде

$$X_i = T_i(X_{1i}, \ldots, X_{mi}) = \Xi_i. \qquad (4)$$

Последовательность статистик $\{T_i\}$ и норм $\{\|\Xi_i\|\}$ является полной характеристикой эквивалентных в H последовательностей систем случайных величин $\{(X_i, X_{1i}, \ldots, X_{mi})\}$. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть

$$X_1(t) = DX(t), \ldots, X_m(t) = D^m X(t), \qquad (5)$$

где D — оператор сдвига $DX(t) = X(t - \Delta t)$. Положим $\|\Xi_i\| = 0$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $\beta_{0i} = 0$. Тогда равенство (4) в развернутой форме имеет вид

$$X_1(t) = DX(t), \ldots, X_m(t) = D^m X(t), \qquad (6)$$

Полученное уравнение является конечно-разностным однородным уравнением порядка m с переменными коэффициентами. Обозначим его частные решения

$$\varphi_{1i}, \ldots, \varphi_{mi}.$$

Общее решение имеет вид

$$X_i = \sum_{s=1}^{m} C_s \varphi_{si}.$$

Таким образом, при введенных ограничениях последовательность случайных величин $\{X_i\}_0^n$ на интервале $0 \leqslant i \leqslant n$ является параметрической. Вид функций $\varphi_{1i}, \ldots, \varphi_{mi}$ зависит от коэффициентов $\beta_{1i}, \ldots, \beta_{mi}$ конечно-разностного уравнения (6). Если, например, коэффициенты $\beta_{1i}, \ldots, \beta_{mi}$ не зависят от t и характеристическое уравнение конечно-разностного уравнения (6) имеет плюс кратности m в начале координат плоскости комплексного переменного, то функции $\varphi_{1i}, \ldots, \varphi_{mi}$ являются степенными:

$$\varphi_{1i} \equiv 1;\ \varphi_{2i} \equiv i;\ \ldots;\ \varphi_{mi} \equiv i^{m-1}, —$$

и, следовательно, последовательность случайных величин $\{X_i\}_0^n$ разлагается в степенной ряд

$$X_i = \sum_{s=1}^{m} C_s i^{s-1},$$

где C_s $(s=1, \ldots, m)$ — случайные величины.

При условиях предыдущего примера положим: норма $\|\Xi_i\| \neq 0$ и не зависит от индекса i вместе с параметрами $\beta_{1i}, \ldots, \beta_{mi}$. Уравнение (4) при этих условиях имеет вид

$$X_i = \sum_{s=1}^{m} \beta_s X_{i-s} + \Xi_i, \tag{7}$$

т. е. является неоднородным конечно-разностным уравнением с постоянными коэффициентами. Положим, что корни его характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости плоскости комплексного переменного. Тогда все частные решения однородного уравнения (7) при увеличении i стремятся к нулю, и поэтому при любых конечных начальных условиях математическое ожидание сходится к нулю

$$\lim_{i \to \infty} EX_i \to 0,$$

а математические ожидания

$$C_i(s) = Ex_i X_{i-s} \to K_i(s)$$

сходятся к соответствующим корреляционным моментам. Их зависимость от индекса i можно исследовать с помощью системы конечно-разностных уравнений. Для получения ее вычтем из (7) математическое ожидание $EX_i = \sum\limits_{s=1}^{m} \beta_s EX_{i-s}$, умножим полученное равенство последовательно на $X_i, X_{i-1}, \ldots, X_{i-m}$ и применим операцию математического ожидания:

$$K_i(0) = \beta_1 K_i(1) + \ldots + \beta_m K_i(m) + E\Xi_i^2;$$

$$K_i(s) = \beta_1 K_{i-1}(s-1) + \ldots + \beta_s K_{i-s}(0) + \ldots + \beta_m K_{i-s}(m-s), \tag{8}$$

где

$$K_j(s) = E[(X_j - EX_j)\ (EX_{j-s} - EX_{j-s})].$$

Первое уравнение системы (8) можно записать также в виде

$$K_i(0) = \beta^T K_{\cdot|i} \beta + E\Xi_i^2,$$

где $K_{\cdot|i}$ — корреляционная матрица вектора $X_{1i} = (X_{i-1}, \ldots, X_{i-m})$; $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Полученная система $(m+1)$ уравнений содержит $(m+1)$

переменную $K_i(0)$, $K_i(1)$, ..., $K_i(m)$ и относительно их является системой неоднородных конечно-разностных уравнений. Если эта система устойчива, то корреляционные моменты $K_i(0)$, ..., $K_i(m)$, рассматриваемые как функции индекса i, сходятся к постоянным значениям и, следовательно, последовательность случайных величин $\{X_i\}$ является асимптотически стационарной относительно первых двух моментов. Корреляционную функцию $K(s)$ целочисленного аргумента s последовательности $\{X_i\}$ можно найти из уравнения

$$K(i+m)=\beta_1 K(i+m-s)+\ldots+\beta_m K(i), \tag{9}$$

которое получается из уравнения (7). Частные решения уравнения (9) совпадают с частными решениями однородного уравнения (7). Его решения при начальных условиях $K(0)$, ..., $K(m)$ дают значения корреляционного момента $K(s)$ при целых значениях $s>m$.

В рассмотренных примерах при условии (5) статистика T связывает m предыдущих значений процесса $X(t)$ с последующим, отстоящим на шаг измерения Δt. Для решения задачи фильтрации такая статистика является достаточной в качестве характеристики статистических свойств процесса. Для решения задачи сглаживания требуются статистики, связывающие оцениваемое значение функции, отстоящее от ближайшей реализации более чем на один шаг, т. е.

$$\hat{x}_{i+\theta}=T_{i,\theta}(x_{i-1},\ldots,x_{i-m}),\ \theta=1,2,\ldots .$$

Статистика $T_{i,\theta}$ и ее критерий качества могут быть получены аналитическим путем, если известны статистики $T_{j,0}$ ($j=i$, ..., $i+\theta$) и критерии качества $E\Xi^2_{j,0}$. Введем обозначение векторов размерности m:

$$X_{\cdot|i}=(X_{i-1},\ldots,X_{i-m});\ \Xi_{\cdot|i}=(\Xi_i,0,\ldots,0).$$

Равенство

$$X_{i+\theta}=\beta^T_{i+\theta}X_{\cdot|i+\theta}+\Xi_{i+\theta}$$

и тождества

$$\begin{gathered}X_{i+\theta-1}=X_{i+\theta-1}\\ \ldots\ldots\ldots\\ X_{i+\theta-m+1}=X_{i+\theta-m+1}\end{gathered}$$

можно записать в матричном виде

$$X_{\cdot|i+\theta+1}=B_{i+\theta}X_{\cdot|i+\theta}+\Xi_{\cdot|i+\theta}. \tag{10}$$

Матрица $B_{i+\theta}$ имеет следующий вид:

$$B_{i+\theta}=\begin{Vmatrix}\beta_{1,i+\theta},\ldots,\beta_{m,i+\theta}\\ 1\quad 0\quad \ldots 0\\ 0\quad 1\ 0\ldots 0\\ \ldots\ldots\ldots\\ 0\quad 0\quad \ldots 010\end{Vmatrix}$$

Последовательной подстановкой в равенство (10) векторов $X_{\cdot|i+\theta}$, ..., $X_{\cdot|i}$ получим

$$\begin{aligned}X_{\cdot|i+\theta+1}&=B_{i+\theta}\ldots B_iX_{\cdot|i}+\sum_{k=0}^{\theta}\prod_{j=0}^{k}B_{i+\theta-j+1}\Xi_{\cdot|i+\theta-k}=\\ &=B_{i+\theta,i}X_{\cdot|i}+\sum_{k=0}^{\theta}\prod_{j=0}^{k}B_{i+\theta-j+1}\Xi_{\cdot|i+\theta-k}.\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $B_{i+\theta,i}=B_{i+\theta}\ldots B_i$; $B_{i+\theta+1}=I$ — единичная диагональная матрица $(m \times m)$. Первая строка первого слагаемого матричного уравнения (11) является статистикой, отображающей множество значений случайного вектора $X_{\cdot|i} = (X_{i-1}, \ldots, X_{i-m})$ на множество значений оценки случайной величины $X_{i+\theta}$. Оптимальность статистически вытекает из ортогональности в H подпространств, содержащих векторы $X_{i-1}, \ldots, X_{i-m}$ и векторы $\Xi_{i+\theta}, \ldots, \Xi_i$. Критерий качества ее равен

$$E\left[X_{i+\theta} - \hat{X}_{i+\theta}\right]^2 = E\left[\sum_{k=0}^{\theta} \prod_{j=0}^{k} B_{i+\theta-j+1}\, \Xi_{\cdot|i+\theta-k}\right]^2.$$

Обозначим левый верхний элемент матрицы $\prod_{j=0}^{k} B_{i+\theta-j+1}$ через $\beta_{11/i+\theta-k+1}$. Учитывая ортогональность в H векторов $\Xi_{i+\theta}, \ldots, \Xi_i$ выражение для критерия качества можно записать в виде

$$E\left[X_{i+\theta} - \hat{X}_{i+\theta}\right]^2 = \sum_{k=0}^{\theta} \beta^2_{11/i+\theta-k+1} \|\Xi_{i+\theta-k}\|^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Лэнинг. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
3. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию 5 сентября 1972 г.

УДК 681.2.08

А. Д. БОЛЫЧЕВЦЕВ

(Харьков)

ОПТИМАЛЬНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КВАНТОВАННЫХ ПО УРОВНЮ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Рассматриваемая задача относится к проблеме квантования и дискретизации непрерывных зависимостей [1—4]. Как и в [1], предполагается, что от измерительной системы к потребителю информации в дискретные моменты времени поступает квантованный по уровню поток отсчетов измеряемого сигнала. По этим данным, используя различные интерполяционные оценки, потребитель информации восстанавливает исходный сигнал. При этом появляется некоторая погрешность — методическая ошибка,— характерная для дискретного измерения. При заданной цене делений измерительного прибора уменьшение интервалов дискретизации снижает эту погрешность, однако усложняет и удорожает процесс измерения. Так возникает задача оптимального согласования интерполяционные оценки, потребитель информации восстанавливает

В статье дается приближенное решение этой задачи для случая ступенчатой интерполяции. Метод решения основан на вероятностных оценках течения во времени измеряемого случайного процесса. Предполагается, что процесс не содержит регулярной (неслучайной) составля-