5. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.
6. Р. Л. Стратонович. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М., «Советское радио», 1961.
7. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. I. М., «Советское радио», 1966.
8. М. Г. Билык. Приближенное распределение времени пребывания случайного процесса в заданной области.— Отбор и передача информации, 1970, № 23.
9. E. Parzen. Regression analysis of Continuons · parameter time series.— Proc. 4-th Berkeley Symposium, 1960, v. 1.
10. В. В. Дубовский. Метод определения основных параметров автокорреляционной функции стационарного случайного процесса.— Автоматика и телемеханика, 1971, № 2.
11. Г. В. Обрезков. Вероятность достижения границы в нелинейных системах авторегулирования.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1968, № 3.

Поступила в редакцию 7 декабря 1971 г., окончательный вариант — 7 августа 1972 г.

УДК 681.2.082/083.519.2

Б. А. МОРЯКИН

(Новосибирск)

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ

Алгоритмы обработки результатов эксперимента часто строят при предположении, что сигнал является параметрическим случайным процессом, так как на интервале обработки он разлагается в ряд

$$X(t) = \sum_{s=1}^{m} C_s \varphi_s(t),$$

где C_s — случайные величины; $\varphi_s(t)$ — известные функции, а ошибки измерения некоррелированы на интервале, превышающем интервал между двумя соседними измерениями. При этих предположениях оптимальное решение многих задач обработки дает хорошо разработанный метод наименьших квадратов. Однако исследование сигналов и ошибок в ряде случаев не подтверждает гипотезу параметрического сигнала и некоррелированных ошибок. В подобных случаях возникает необходимость оценить, насколько снижается качество обработки из-за различия статистических свойств моделей сигнала и ошибки и их реализаций.

Ниже находятся оценки потерь качества фильтрации для сигналов и ошибок, являющихся марковскими случайными процессами первого порядка.

Рассмотрим вначале задачу оценивания потерь от использования гипотезы некоррелированности ошибок. Пусть последовательность случайных величин $\{Z_i\}_1^n$, которые будем называть ошибками измерения, образует марковскую цепь

$$Z_i = \beta Z_{i-1} + \zeta_i, \tag{1}$$

где Z_{i-1} и ζ_i — некоррелированные случайные величины; их дисперсии не зависят от i и связаны соотношением

$$\sigma_Z^2 = \frac{\sigma_\zeta^2}{1-\beta^2}.$$

Рассмотрим две гипотезы относительно статистической модели ошибки; гипотеза H_1: модель ошибки определяется равенством (1) и $\beta \neq 0$; гипотеза H_2: ошибки некоррелированы, т. е. $\beta = 0$.

Статистические свойства последовательности $\{X_i\}_1^n$ (сигнала) в обоих случаях определим моделью

$$X_i = X_{i-1} + \xi_i.$$

Дисперсия $\sigma^2_{X_1}$ конечна, дисперсия $\sigma^2_{\xi_i}$ постоянна.

Результат измерения y_i равен сумме значений сигнала и ошибки:

$$y_i = x_i + z_i.$$

Требуется оценить при каждом $i > 1$ потери от принятия гипотезы H_2, если верна гипотеза H_1.

Потери точности фильтрации определяются разностью

$$\Delta q_i = q_i^{(2,1)} - q_i^{(1)},$$

где $q_i^{(2,1)}$ —критерий качества фильтрации на i-м шаге в предположении H_2, а верна гипотеза H_1; $q_i^{(1)}$ — то же, но в предположении H_1.

Оптимальные статистики, соответствующие гипотезам H_1 и H_2, можно записать в виде *:

$$\hat{x}_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(1)} y_i; \quad \hat{x}_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(2)} y_i .$$

Критерий качества статистики для гипотезы H_2 при условии, что верна гипотеза H_1, равен

$$q_n^{(2,1)} = E^{(1)} \left[\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(2)} y_i - x_n \right]^2. \tag{2}$$

Верхний индекс (1) при символе операции математического ожидания относится к функции плотности на множестве Y, $y \in Y$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, порожденной гипотезой H_1.

Прибавляя и вычитая в квадратных скобках равенства (2) величину

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(1)} y_i$$

и учитывая некоррелированность случайной величины

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(1)} y_i - x_n$$

с элементами вектора $y = (y_1, \ldots, y_n)$, получим

$$q_n^{(2,1)} = q_n^{(1)} + E^{(1)} \left[\sum_{i=n}^{n} (b_{i/n}^{(2)} - b_{i/n}^{(1)}) y_i \right]^2.$$

Потери от принятия гипотезы H_2 при условии, что верна гипотеза H_1, равны

$$\Delta q_n = E^{(1)} \left[\sum_{i=1}^{n} (b_{i/n}^{(2)} - b_{i/n}^{(1)}) y_i \right]^2.$$

---

* Б. А. Морякин. Линейная фильтрация и предсказание нестационарных марковских процессов.— Автометрия, 1972, № 1.

При вычислении потерь на ЦВМ удобнее пользоваться рекуррентной формулой. По определению,

$$q_n^{(2,1)} = E^{(1)}\left[\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(2)} y_i - x_n\right]^2.$$

Подстановкой $y_n = x_n + z_n$ получим

$$q_n^{(2,1)} = E^{(1)}\left[\sum_{i=1}^{n-1} b_{i/n}^{(2)} y_i - (1 - b_{n/n}^{(2)})\, x_n + b_{n/n}^{(2)} z_n\right]^2. \qquad (3)$$

В соответствии с гипотезой H_1

$$z_n = \beta z_{n-1} + \zeta_n = \beta^2 z_{n-2} + \beta\zeta_{n-1} + \zeta_n = \beta^{n-i} z_i + \sum_{j=i+1}^{n} \beta^{n-j}\,\zeta_j\,.$$

Случайные величины $\zeta_j (j = i+1, \ldots, n)$ некоррелированы со случайной величиной Z_i, поэтому

$$EZ_i\, Z_n = \beta^{n-i}\,\sigma_z^2. \qquad (4)$$

Сделаем в уравнениях (2), (3) подстановку $x_n = x_{n-1} + \xi_n$. Учитывая некоррелированность случайных величин X_i и $Z_i (i = 1, \ldots, n)$, получим

$$q_n^{(2,1)} = E^{(1)}\left[\sum_{i=1}^{n-1} b_{i/n}^{(2)} y_i - (1 - b_{n/n}^{(2)})\, x_{n-1}\right]^2 + (1 - b_{n/n}^{(2)})^2 \sigma_\xi^2 +$$
$$+ 2E^{(1)}\left[\sum_{i=1}^{n-1} b_{i/n}^{(2)} z_i\, b_{n/n} z_n\right] + b_{n/n}^{(2)\,2}\,\sigma_z^2.$$

Используя соотношение (4), преобразуем полученное равенство:

$$q_n^{(2,1)} = E^{(1)}\left[\sum_{i=1}^{n-1} b_{i/n}^{(2)} y_i - (1 - b_{n/n}^{(2)})\, x_{n-1}\right]^2 + (1 - b_{n/n}^{(2)})^2 \sigma_\xi^2 +$$
$$+ 2b_{n/n}\,\sigma_z^2 \sum_{i=1}^{n-1} \beta^{n-i}\, b_{i/n}^{(2)} + b_{n/n}^{(2)2}\,\sigma_z^2.$$

Коэффициенты оптимальной статистики в рассматриваемом случае связаны соотношением

$$b_{i/n}^{(2)} = (1 - b_{n/n}^{(2)})\, b_{i/n-1}^{(2)}\,. \qquad (5)$$

Подставляя это равенство в предыдущее и учитывая, что

$$q_{n-1}^{(2,1)} = E^{(1)}\left[\sum_{i=1}^{n-1} b_{i/n-1}^{(2)} y_i - x_{n-1}\right]^2,$$

получим рекуррентную формулу для определения критерия качества

$$q_n^{(2,1)} = (1 - b_{n/n}^{(2)})^2\, q_{n-1}^{(2,1)} + (1 - b_{n/n}^{(2)})^2\, \sigma_\xi^2 + 2b_{n/n}\,\sigma_z^2 \sum_{i=1}^{n-1} \beta^{n-1}\, b_{i/n}^{(2)} + b_{n/n}^{(2)2}\,\sigma_z^2,$$

или, используя равенство (5),

$$q_n^{(2,1)} = (1 - b_{n/n}^{(2)})^2\, q_{n-1}^{(2,1)} + (1 - b_{n/n}^{(2)})^2\, \sigma_\xi^2 + b_{n/n}^{(2)2}\,\sigma_z^2 +$$
$$+ 2b_{n/n}^{(2)}(1 - b_{n/n}^{(2)})\,\sigma_z^2 \sum_{i=1}^{n-1} \beta^{n-1}\, b_{i/n-1}^{(2)}.$$

Критерий качества $q_n^{(1)}$ равен

$$q_n^{(1)} = \frac{q_{n-1}^{(1)}(\beta^2\sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2) + \sigma_\xi^2\,\sigma_\zeta^2}{(1-\beta)^2\, q_{n-1}^{(1)} + \sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2}.$$

Последовательность величин $\Delta q_i = q_i^{(2,1)} - q_i^{(1)}$ $(i=2, 3, \ldots)$ определяет потери качества фильтрации от допущения некоррелированности ошибки.

Перейдем к задаче оценивания потерь фильтрации при применении метода наименьших квадратов к непараметрическим сигналам, т. е. при $\sigma_\xi^2 \neq 0$.

Задачу будем рассматривать для марковских сигналов вида $X_i = X_{i-1} + \xi_i$ и некоррелированных ошибок.

Рассмотрим две гипотезы. Согласно гипотезе H_1 дисперсии случайной величины X_1 и остаточных членов $\xi_i (i=2, 3, \ldots)$ образуют последовательность

$$\sigma_{x_1}^{(1)^2},\ \sigma_{\xi_2}^{(1)^2},\ \sigma_{\xi_3}^{(1)^2},\ \ldots. \tag{6}$$

По гипотезе H_2 элементы этой последовательности равны

$$\sigma_{x_1}^{(2)\,2},\ \sigma_{\xi_2}^{(2)2},\ \sigma_{\xi_3}^{(2)2},\ \ldots. \tag{7}$$

Последовательности (6) и (7) отличаются хотя бы одним элементом.

Обозначим событие C_{sk} $(s, k=1, 2)$, заключающееся в том, что алгоритм фильтрации построен для гипотезы H_s, а применяется для сигналов, удовлетворяющих гипотезе H_k.

По определению, критерий качества фильтра на n-м шаге равен

$$\min_{b_n \in R_n} E\left[\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}\, y_i - x_n\right]^2 = q_n\,,$$

где b_n есть обозначение для вектора $b_n = (b_{1/n}, \ldots, b_{n/n})$. Для событий C_{sk} типа $s=k$ критерий качества равен

$$\min_{b_n^{(s)} \in R_n} E^{(s)}\left[\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(s)}\, y_i - x_n\right]^2 = q_n^{(s)}, \tag{8}$$

где верхние индексы (s) относятся к плотности вероятностей, порожденной гипотезами H_1 и H_2.

При событиях типа $s \neq k$ имеем

$$\min_{b_n^{(s)} \in R_n} E^{(k)}\left[\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(s)}\, y_i - x_n\right]^2 = q_n^{(s,k)}. \tag{9}$$

Здесь вектор $b_n^{(s)}$ получен из условия минимума (8). Запишем формулу (9) в виде

$$\min_{b_n^{(k)} \in R_n} E^{(k)}\left[\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(k)}\, y_i - x_n - \left(\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(k)}\, y_i - \sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(s)}\, y_i\right)\right]^2 = q_n^{(s,\,k)}.$$

Случайная величина $\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(k)}\, y_i - x_n\right)$ некоррелирована с элементами вектора $y = (y_1, \ldots, y_n)$, поэтому имеем

$$\min_{b_n^{(k)} \in R_n} E^{(k)}\left[\sum_{i=1}^{n} b_{i/n}^{(k)}\, y_i - x_n\right]^2 + E^{(k)}\left[\sum_{i=1}^{n} (b_{i/n}^{(k)} - b_{i/n}^{(s)})\, y_i\right]^2 = q_n^{(s,\,k)}.$$

Вычитая $q_n^{(k)}$ и используя (8), получим

$$q_n^{(s,\,k)} - q_n^{(k)} = E^{(k)}\left[\sum_{i=1}^{n} (b_{i/n}^{(k)} - b_{i/n}^{(s)})\, y_i\right]^2. \tag{10}$$

Формула (10) дает значение потерь качества фильтрации на n-м шаге, если принимается гипотеза H_s, а истинна H_k. Найдем выражение для квадратичной формы, стоящей в правой части. Введем вектор y: $y=x+z$, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор значений сигнала; $z=(z_1, \ldots, z\ )$ — вектор значений ошибки. Учитывая некоррелированность сигнала и ошибки, формулу (10) можно записать в виде

$$q_n^{(s,k)} - q_n^{(k)} = E^{(k)}[(b_n^{(k)} - b_n^{(s)})^T x]^2 + E^{(k)}[(b_n^{(k)} - b_n^{(s)})^T z]^2. \tag{11}$$

При некоррелированных ошибках и дисперсии, не зависящей от i, второе слагаемое равно

$$E^{(k)}[(b_n^{(k)} - b_n^{(s)})^T z]^2 = \sigma_z^2 (b_n^{(k)} - b_n^{(s)})^T (b_n^{(k)} - b_n^{(s)}).$$

Для преобразования первого слагаемого в (11) используем разложение случайной величины x_i ($i=2, 3, \ldots$) в ряд

$$x_i = x_1 + \sum_{j=2}^{i} \xi_j,$$

или, вводя вектор $\xi = (x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$,

$$x = A\xi,$$

где A — верхняя треугольная единичная матрица.

Скалярное произведение $(b_n^{(k)} - b_n^{(s)})^T x$ с использованием этого равенства запишется в виде

$$(b_n^{(k)} - b_n^{(s)})^T x = (b_n^{(k)} - b_n^{(s)})^T A\xi = a_n^{(s,k)T} \xi,$$

где

$$a_n^{(s,k)} = A^T (b_n^{(k)} - b_n^{(s)})$$

и первое слагаемое в правой части формулы (11) будет равно

$$E^{(k)}[(b_n^{(k)} - b_n^{(s)})^T x]^2 = E^{(k)}[a_n^{(s,k)T} \xi]^2. \tag{12}$$

Квадратичные формы (12) для событий типа C_{ks} и C_{sk} одинаковы, поэтому в дальнейшем верхние индексы у вектора a_n опускаем. Учитывая некоррелированность элементов случайного вектора ξ, получим

$$E^{(k)}[a_n^T \xi]^2 = a_{1/n}^2 \sigma_{x_1}^{(k)2} + \sum_{i=2}^{n} a_{i/n}^2 \sigma_{\xi_i}^{(k)2}.$$

С использованием полученных равенств формула для оценивания потерь при событиях типа C_{sk} принимает вид

$$q_n^{(s,k)} - q_n^{(k)} = a_{1/n}^2 \sigma_{X_1}^{(k)2} + \sum_{i=2}^{n} a_{i/n}^2 \sigma_{\xi_i}^{(k)2} + \sum_{i=1}^{n} (b_n^{(k)} - b_n^{(s)})^2 \sigma_{Z_i}^2.$$

Метод наименьших квадратов дает оптимальную статистику при $\sigma_{X_1}^2 = \infty$ и $\sigma_{\xi_i}^2 = 0$ $(i=2,3,\ldots)$. Пусть в соответствии с гипотезой H_1

$$\sigma_{x_1}^2 = \infty, \ \sigma_{\xi_i}^2 = 0 \ (i = 2, 3, \ldots).$$

Гипотеза H_2:

$$\sigma_{x_1}^2 < \infty, \ \sigma_{\xi_i}^2 > 0 \ (i = 2, 3, \ldots).$$

Тогда для события типа C_{12} критерий качества равен

$$q_n^{(1,2)} = q_n^{(2)} + \sum_{i=2}^{n} a_{i/n}^2 \sigma_{\xi_i}^2 + [a_{1/n}^2 \sigma_{X_1}^2 + \sum_{i=1}^{n} (b_{i/n}^{(2)} - b_{i/n}^{(1)})^2 \sigma_{Z_i}^2],$$

а для события типа C_{21}

$$q_n^{(2,1)} = q_n^{(1)} + \left[a_{1/n}^2 \sigma_{X_1}^2 + \sum_{i=1}^{n} (b_{i/n}^{(2)} - b_{i/n}^{(1)})^2 \sigma_{Z_i}^2 \right].$$

В квадратные скобки выделены члены, одинаковые при событиях типа C_{12} и C_{21}.

Между критериями качества $q_n^{(1)}$ и $q_n^{(2)}$ имеется отношение неравенства $q_n^{(2)} > q_n^{(1)}$.

Если алгоритм фильтрации построен для гипотезы H_1, а выполняется гипотеза H_2, то критерий качества $q_n^{(1,2)}$ больше критерия качества $q_n^{(2)}$ на величину

$$q_n^{(1,2)} - q_n^{(2)} = \sum_{i=2}^{n} a_{i/n}^2 \sigma_{\xi_i}^2 + \left[a_{1/n}^2 \sigma_{X_1}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(b_{i/n}^{(2)} - b_{i/n}^{(1)}\right)^2 \sigma_{Z_i}^2 \right].$$

При событиях типа C_{21} критерий качества $q_n^{(2,1)}$ больше критерия качества $q_n^{(1)}$ на величину

$$q_n^{(2,1)} - q_n^{(1)} = \left[a_{1/n}^2 \sigma_{X_1}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(b_{i/n}^{(2)} - b_{i/n}^{(1)}\right)^2 \sigma_{Z_i}^2 \right].$$

На рис. 1 показан общий вид зависимостей $q_n^{(s,k)}$ от n.

Если вычисление оценки текущего значения функции $x(t)$ по методу наименьших квадратов осуществляется при фиксированном интервале

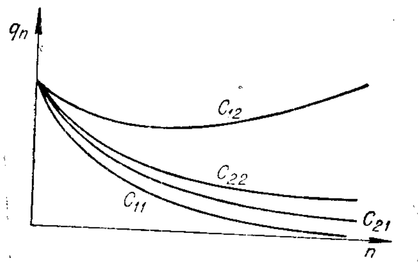

Рис. 1.

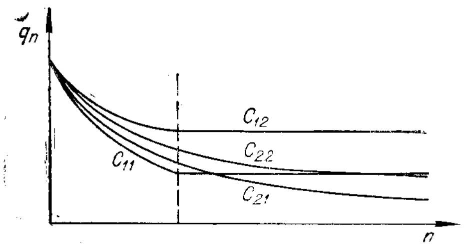

Рис. 2.

наблюдения, то критерий качества, начиная с объема выборки n_1, где n_1 — число измерений на интервале наблюдения, при событиях типа C_{11}, C_{12} остается постоянным. На рис. 2 показан случай сглаживания при фиксированном объеме выборки для событий типа C_{11}, C_{12} и растущем объеме для событий типа C_{22}, C_{21}.

Поступила в редакцию 5 сентября 1972 г.