УДК 517.948.32

Р. Д. БАГЛАЙ

(Новосибирск)

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ОБОБЩЕННОГО СУММИРОВАНИЯ

Вычисление производных от эмпирически заданных функций — одна из часто встречающихся задач обработки. Способов ее решения известно много. Но кто работал с эмпирическим материалом, тот знает, насколько трудно справляться с этой задачей, особенно когда требуется вычислять производные высших порядков. Причина тому — трансформация малых погрешностей измерений в большие погрешности при вычислении производных. Или, иначе, при стремлении интервала выборки к нулю дисперсия ошибки в производных неограниченно возрастает. В этом смысле мы имеем дело с некорректно поставленной задачей. Для ее решения уместно попытаться применить регуляризующий алгоритм [1]. Ниже излагаются результаты применения разработанных нами программ, в которых реализуется этот алгоритм. Даны примеры решения некоторых модельных и практических задач. Проводится сравнение с тем, что можно получить путем дифференцирования аппроксимирующего ряда Фурье для эмпирической функции с последующим применением методов обобщенного суммирования.

Пусть задана эмпирическая функция (сигнал) $F(t)$ и требуется вычислить k-производную: $F^{(k)}(t) = \varphi(t)$. Эта задача равносильна решению следующего интегрального уравнения:

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\,\varphi(\tau)\,d\tau = F(t) - F(0) - \ldots - t^{(k-1)}F^{(k-1)}(0). \tag{1}$$

Отметим некоторые его свойства. Во-первых, ядро $\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}$ обращается в нуль при $t=\tau$. Во-вторых, для решения уравнения (1) необходимо знать в нуле все младшие производные от $F(t)$. Последнее может показаться несущественным, поскольку всегда есть возможность решать задачу последовательно при $k=1, 2, \ldots$. Однако для функций невысокого порядка гладкости последовательные вычисления дают значительно худший результат. Здесь уместно также заметить, что предварительное сглаживание сигнала $F(t)$ при решении интегральных уравнений связано с известным риском. Дело в том, что после сглаживания задача может оказаться неразрешимой. Действительно, для существования решения необходимо, чтобы порядок гладкости $F(t)$ был выше порядка гладкости ядра по t. В физических задачах это условие всегда выполняется, но предварительное сглаживание может нарушить это условие, и тогда уравнение (1) не будет иметь решения в классе обычных функций.

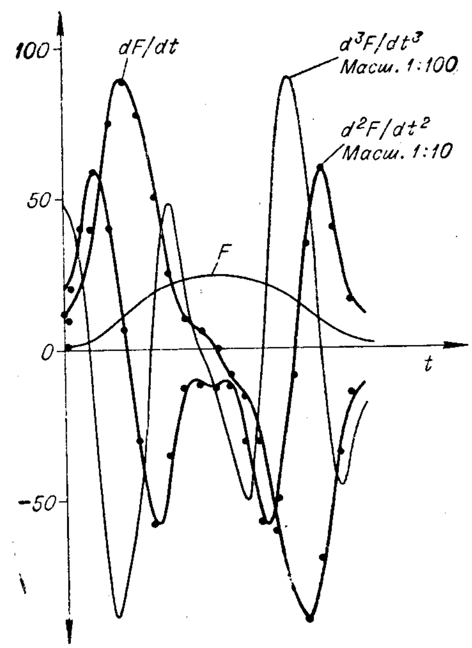

Рис. 1.

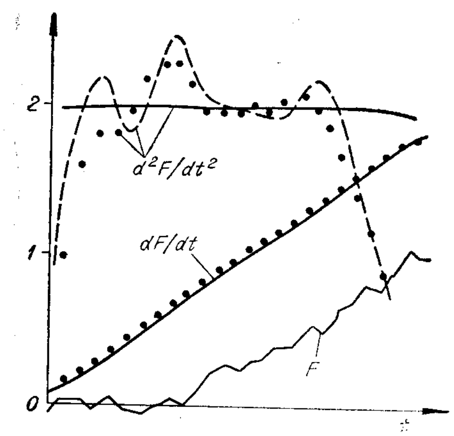

Рис. 2.

Для вычисления производных нами разработаны достаточно универсальные программы, в которых используется регуляризация первого порядка. Оптимальный параметр регуляризации в программах находится автоматически по способу, изложенному в [2]. В первой программе производные вычисляются последовательно. Эта программа оказалась эффективной при работе с гладкими сигналами. Результаты вычислений первых трех производных от эмпирической функции $F(t)$, заданной в сорока равноотстоящих точках аргумента, показаны сплошными линиями на рис. 1. Попытка применить эту программу для вычисления производных от функции малого порядка гладкости оказалась менее успешной. Так, для модельной задачи $F=t^2$, когда t задавалось в сорока точках на интервале (0, 1) и добавлялся аддитивный шум ($\pm1\%$ от 1) с равномерным распределением, результаты высчислений показаны штриховыми линиями на рис. 2. Как видим, вторая производная вычисляется неудовлетворительно.

Во второй программе реализуется непосредственное вычисление как первой, так и второй производной. Значение $F'(0)$ определяется по первым четырем отсчетам функции F. Результаты вычислений по этой программе для той же модельной задачи со значительно большим шумом (порядка $\pm5\%$ от 1) показаны сплошными линиями на рис. 2. Здесь вторая производная вычисляется несравненно лучше.

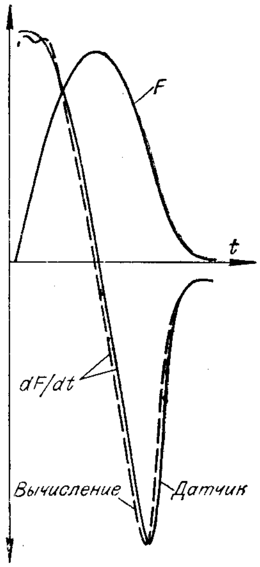

Рис. 3.

Разработка программ с использованием метода регуляризации наталкивается на затруднения, обусловленные необходимостью решать обширные системы алгебраических уравнений: требуется большая оперативная память машины и сравнительно большое время счета. В этом отношении выгодно отличается способ, основанный на дифференцировании аппроксимирующего ряда для функции $F(t)$ с последующим применением метода обобщенного суммирования [3, 4]. Этот способ положен в основу третьей программы. Она позволяет обрабатывать на машине «Минск-22» до двух тысяч чисел. Результаты вычислений с ее помощью показаны точками на рис. 1, 2.

Применялись программы, в частности, для проверки работы датчика производной от микросекундных импульсов тока. На рис. 3 показана форма импульса и снимаемая с датчика и вычисленная производные.

Во всех программах исходными данными являются массив чисел, представляющих F, и шаг выборки. Порядок производной задается с пульта машины.

Опыт работы с использованием этих программ позволяет сделать следующее заключение. Для гладких функций одинаково хороший результат получается при использовании любой из названных выше программ. Если при этом требуется обрабатывать большие числовые массивы или важно сократить время счета, то имеет смысл использовать третью программу, основанную на методе обобщенного суммирования. Для функций малого порядка гладкости, или точнее, когда вычисляемая производная может оказаться разрывной, лучшие результаты дает вторая программа, основанная на методе регуляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов. О некорректно поставленных задачах.— В сб. «Вычислительные методы и программирование». М., Изд-во МГУ, 1967.
2. Р. Д. Баглай. Выбор параметра регуляризации.— Автометрия, 1973, № 1.
3. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
4. А. Н. Тихонов. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье.— Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 2.

Поступило в редакцию 20 сентября 1972 г.