АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1972

УДК 621.317.08+519.281

Г. А. ИВАНЧЕНКО, Г. И. ПЕРЕТЯГИН, Г. П. ЧЕЙДО
(Новосибирск)

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ СКАНИРОВАНИИ

В настоящее время все большее значение приобретают проблемы восприятия и обработки огромного количества информации, полученной в результате физико-технического эксперимента. Исключительно важным шагом в этом направлении явилось включение ЭЦВМ в качестве звена большого исследовательского комплекса, состоящего из объекта исследования, устройств первичного восприятия данных (пузырьковые и искровые камеры, электронно-оптические преобразователи, телескопы и т. д.) и элементов промежуточной памяти (фотопластинки, фотопленки, видиконы и т. п.).

Информация, содержащаяся в фотографическом материале, сначала должна быть приведена к форме, удобной для последующей обработки на ЭЦВМ. Это достигается посредством считывания координат оптических изображений с помощью сканирующей системы.

Сканирование фотоносителя производится обычно бегущим световым лучом радиуса $r_л$, причем в простейшем случае координаты контура объекта на фотопластинке считываются в той точке, в которой выходной сигнал превысит некоторый пороговый уровень. Измеренные точки задаются парой координат (x_i, y_i) в ортогональной системе (x, y), расположенной в плоскости фотоснимка (строчный растр). Такую пару координат будем называть отсчетом. Процесс обработки в данном случае разделяется на следующие стадии: 1) измерение; 2) выделение групп отсчетов, относящихся к различным объектам; 3) оптимальное статистическое оценивание параметров изображений; 4) проверка гипотезы о соответствии группы отсчетов данному описанию формы изображения; 5) определение статистических параметров распределения объектов по полю фотокадра.

В данной работе будут рассматриваться в качестве входных изображений объекты, задаваемые следующим аналитическим описанием:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2, \tag{1}$$

где ρ, x_0, y_0 — соответственно радиус и координаты центра объекта. Класс таких объектов образуют, например, изображения звезд на астронегативе, экспонированные в режиме слежения телескопа за звездным небом, слабые свечения, зарегистрированные на фотопленку.

1. Рассмотрим задачу оценивания параметров в следующей формулировке. Требуется определить значения неизвестного вектора параметров $\Theta^T = (x_0, y_0, \rho)$ по результатам измерений x_i^*, y_i^*, где

$$x_i^* = x_i^{\text{ист}} + \xi_i;\ y_i^* = y_i^{\text{ист}} + \eta_i;\ i = \overline{1, n}$$

и $x_i^{\text{ист}}$, $y_i^{\text{ист}}$ — истинные координаты контура объекта. Здесь мы предполагаем, что случайные величины ξ_i и η_i статистически независимы и распределены по нормальному закону $N(0, \sigma^2)$. Известно [1], что функцией распределения длины радиуса-вектора $r = \sqrt{(x_i^* - x_0)^2 + (y_i^* - y_0)^2}$, координаты которой $x_i^* - x_0$, $y_i^* - y_0$ независимы и распределены по нормальному закону с одинаковыми дисперсиями σ^2 и различными средними a и b соответственно, является обобщенная функция Релея:

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+\rho^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r\rho}{\sigma^2}\right);\quad r > 0;\quad f(r) = 0;\quad r < 0, \tag{2}$$

где

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(x_i^{\text{ист}} - x_0)^2 + (y_i^{\text{ист}} - y_0)^2}.$$

Если радиус ρ гораздо больше σ, то функцию Бесселя $I_0(z)$ можно заменить ее асимптотическим разложением:

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 + \frac{1}{8\,z} + \ldots\right). \tag{3}$$

Тогда

$$f(r) \sim \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+\rho^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\rho r}} e^{\frac{r\rho}{\sigma^2}} \left(1 + \frac{\sigma^2}{8\rho r}\right),$$

или

$$f(r) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r-\rho)^2}{2\sigma^2}} \left(1 + \frac{\sigma^2}{8r\rho}\right)\sqrt{\frac{r}{\rho}}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что с точностью до поправочного множителя $\left(1 + \frac{\sigma^2}{8r\rho}\right)\sqrt{\frac{r}{\rho}}$ обобщенный закон Релея переходит в нормальный закон с параметрами ρ и σ. При этом

$$E(r) \sim \rho(1 + \sigma^2/2\rho^2); \tag{5}$$

$$D(r) \sim \sigma^2(1 - \sigma^2/4\rho^2). \tag{6}$$

Первые слагаемые в формулах (5) и (6) равны соответственно среднему значению и дисперсии предельного нормального закона распределения, а вторые слагаемые дают поправку, убывающую по мере роста ρ/σ. Так, уже при $\rho/\sigma = 3$ коэффициент асимметрии данного распределения $\gamma = 0{,}07$ и кривая распределения становится практически симметричной и достаточно близкой к кривой нормального закона распределения.

2. При условии оптимальной фильтрации считываемых оптических изображений соотношение $\rho/\sigma \geqslant 3$ будет выполняться. Действительно, это условие по существу сводится к выбору соответствующих размеров анализирующих апертур и величины порога (уровня) считывания координат контура изображения. При этом, если сканирующий световой луч имеет размер порядка нескольких десятков микрон и менее, основным фактором, определяющим отношение сигнал/шум, является зернистая структура фотоматериалов.

Величина фотографических шумов σ_Φ^2 зависит как от типа фотоматериала, так и от коэффициента пропускания τ считываемого участка изображения. Будем под выходным сигналом в фотографии понимать число неперекрытых проявленных зерен или величину, ему пропорциональную. При постоянстве площади элемента, для которого оценивается величина сигнала, последнюю можно выразить долей α светового потока, поглощенного в элементе проявленного фотографического материала, при пропускании через него света. Очевидно, что

$$\alpha=1-\tau=\Phi_0-\Phi/\Phi_0=m/M, \tag{7}$$

где Φ_0 и Φ — световые потоки, соответственно падающий и прошедший через элемент проявленного фотослоя; m — количество неперекрытых проявленных зерен; M — максимальное количество таких зерен, которое уложилось бы на поверхности, равной площади сканирующего луча. Согласно [2, 3], распределение числа проявленных зерен m, находящихся в заданном элементе изображения с общим числом зерен M, является биномиальным:

$$P_m=\frac{M!}{m!\,(M-m)!}\,p^m(1-p)^{M-m}, \tag{8}$$

где p — вероятность проявления одного зерна. Следовательно,

$$\overline{m}=Mp;\quad \sigma_m=\sqrt{Mp\,(1-p)}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что флюктуации коэффициента поглощения α определяются величиной $\sigma_\alpha=\sigma_m/M$. Таким образом, величина отношения сигнал/шум для фотографической системы:

$$\psi_\Phi=\frac{\alpha-\alpha_{\text{в}}}{\sigma_\alpha},$$

где $\alpha_{\text{в}}$ — величина сигнала, соответствующая уровню вуали.

Освещенность внутри светового пятна не является постоянной и в общем случае может быть выражена функцией

$$\Phi(\xi,\eta)=\Phi_0W(\xi,\eta),$$

где $W(\xi,\eta)$ — весовая функция.

Если изображение считываемого объекта $\alpha(x,y)$ задано, то световой поток, поглощенный в выделяемом световым пятном элементе поверхности A, будет равен

$$\Phi_\alpha=\Phi_0\iint_A\alpha(x,y)\,W(x-x_0,\,y-y_0)\,dxdy.$$

Следовательно, среднее значение коэффициента поглощения в точке (x_0,y_0):

$$\alpha_{\text{ср}}(x_0,y_0)=\frac{\iint_A\alpha(x,y)\,W(x-x_0,\,y-y_0)\,dxdy}{\iint_A W(x-x_0,\,y-y_0)\,dxdy}. \tag{10}$$

Исходя из этого, получаем, что величина отношения сигнал/шум на выходе системы сканирующий луч — фотоматериал будет иметь следующий вид (без учета вуали):

$$\psi_{\text{вых}}=\frac{\alpha_{\text{ср}}}{\sigma_\alpha}=\frac{\iint_A\alpha(x,y)\,W(x-x_0,\,y-y_0)\,dxdy}{\sigma_\alpha\iint_A W(x-x_0,\,y-y_0)\,dxdy}.$$

Очевидно, что радиус сканирующего луча необходимо выбирать, исходя из разрешающей способности фотоматериалов с учетом фотографических шумов. Допустим, что $\alpha(x, y)$, является осциллирующей функцией; тогда

$$\psi_{\text{вых}} = \frac{\alpha_0}{\sigma_\alpha} \frac{Re\left\{\iint\limits_A e^{-i\omega_x x - i\omega_y y} W(x - x_0, \ y - y_0)\, dxdy\right\}}{\iint\limits_A W(x - x_0, \ y - y_0)\, dxdy}. \qquad (11)$$

Функция рассеяния света в аберрационном пятне объектива может быть аппроксимирована следующей весовой функцией:

$$W(x - x_0, \ y - y_0) = e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{r_л^2}},$$

где $r_л$ — радиус сканирующего луча на уровне $1/e$. Введем полярные координаты (система изотропная): $x - x_0 = r\cos\varphi_1$, $y - y_0 = r\sin\varphi_1$; тогда пространственные частоты ω_x и ω_y тоже будут составляющими вектора пространственной частоты $\omega_x = \omega\cos\varphi_2$, $\omega_y = \omega\sin\varphi_2$.

Произведем подстановку новых переменных в интеграл (11) и после соответствующих преобразований получим

$$\psi_{\text{вых}} = \frac{C\alpha_0}{\sigma_\alpha \pi r_л^2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} e^{-ir\omega(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)} e^{-r^2/r_л^2}\, dr d\varphi_1 =$$

$$= \frac{C_1\alpha_0}{\sigma_\alpha} \int\limits_0^\infty r I_0(\omega r)\, e^{-r^2/r_л^2}\, dr = \frac{C_1\alpha_0}{\sigma_\alpha} F(\omega),$$

где $F(\omega)$ — нормированная пространственно-частотная характеристика; C и C_1 — константы. Следовательно,

$$\psi_{\text{вых}} = \frac{C_1\alpha_0}{\sigma_\alpha} F(\omega) = C_2 \alpha_0 r_л e^{-\left(\frac{\omega r_л}{2}\right)^2}. \qquad (12)$$

Оптимальный радиус сканирующего луча $r_л$ будет соответствовать максимальной величине отношения сигнал/шум

$$r_{л.\ опт} = \frac{\sqrt{2}}{\omega} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi},$$

где $\lambda = 2\pi/\omega$ — пространственный период. На основании [4] разрешающая способность астронегативов порядка 60—70 лин/мм, что соответствует $\lambda \sim 15 \div 17$ мкм и, следовательно, $r_{л.\ опт} \sim 3{,}6$ мкм.

Согласно выбранной нами модели изображения передаваемого объекта на фотопластинке (1), коэффициент поглощения можно задать в следующем виде:

$$\alpha(x, y) = e^{-\frac{x^2 + y^2}{2R^2}}.$$

Тогда, согласно формуле (10), в точке (x_0, y_0)

$$\alpha_{ср}(x_0, y_0) = \frac{2R^2}{r_л^2 + 2R^2} e^{-\frac{x_0^2 + y_0^2}{r^2 + 2R^2}} = \frac{\overline{m}}{M}. \qquad (13)$$

Найдем дисперсию считывания координат изображений, предполагая, что сканирующий луч идет вдоль оси x $(y = 0)$, а флюктуации величины m невелики по сравнению с самой этой величиной. Очевидно, что оптимальный уровень считывания координат изображения будет соответствовать точке, в которой производная сигнала $\alpha'(x, y)$ будет иметь максимум. Так как

$$\alpha'_x(x_0, 0) = -\frac{4x_0R^2}{\left(r_{л}^2 + 2R^2\right)^2} e^{-\frac{x_0^2}{r_{л}^2+2R^2}},$$

$$\alpha''(x_0, 0) = \frac{4R^2}{\left(r_{л}^2 + 2R^2\right)^2} e^{-\frac{x_0^2}{r_{л}^2+2R^2}} \left[\frac{2x_0^2}{r_{л}^2 + 2R^2} - 1\right],$$

то

$$x_0^{опт} = \sqrt{\frac{r_{л}^2 + 2R^2}{2}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{m - \bar{m}}{M} = \frac{2R^2}{r_{л}^2 + 2R^2}\left[e^{-\frac{(x_0^*)^2}{r_{л}^2 + 2R^2}} - e^{-\frac{(x_0^{ист})^2}{r_{л}^2 + 2R^2}}\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{2R^2}{r_{л}^2 + 2R^2}\left(\frac{2x_0^{ист}}{r_{л}^2 + 2R^2}\right) e^{-\frac{(x_0^{ист})^2}{r_{л}^2 + 2R^2}} \Delta x_0,$$

получим

$$\sigma_x^2 = \overline{(\Delta x_0)^2} = \frac{\sigma_m^2\left(r_{л}^2 + 2R^2\right)^4}{M^2 16R^4 x_0^2} e^{\frac{2x_0^2}{r_{л}^2 + 2R^2}}. \qquad (14)$$

Подставляя в формулу (14) вместо x_0 его оптимальное значение, найдем

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_m^2 \rho^6 e}{M^2\left(\rho^2 - \frac{r_{л}^2}{2}\right)^2} \simeq \frac{\sigma_m^2 \rho^2 e}{M^2}.$$

Учитывая, что $\sigma_{m\max}^2 = \frac{M}{4}$, $M = \frac{r_{л}^2}{\bar{a}_з^2}$, где $\bar{a}_з \sim 1$ мкм (средний размер зерна),

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_m^2 \rho^2 e}{M^2} \leqslant \frac{M\rho^2 e}{4M^2} = \frac{\rho^2 e}{4M} = \frac{\rho^2 e \bar{a}^2}{4r_{л}^2} = \frac{\rho^2}{24},\ \sigma_x \leqslant \frac{\rho}{4}.$$

Заметим, что выбранный нами аналитический вид коэффициента поглощения $\alpha(x, y)$, вследствие ограниченности динамического диапазона фотоматериалов, будет соответствовать только изображениям с радиусом $\rho \sim \lambda$. Тогда

$$\sigma_x^2 \sim \frac{\lambda^2 e 2\pi^2}{4\lambda^2}\bar{a}_з^2 = \frac{2{,}7 \cdot 2 \cdot 9{,}87}{4}\bar{a}_з^2 \simeq 13\bar{a}_з^2.$$

Учитывая, что реальные изображения в основном имеют радиус $\rho \geqslant$ $\geqslant 25$ мкм, получим $\rho/\sigma \geqslant 5$ (коэффициент асимметрии $\gamma = 0{,}015$) и асимптотическое приближение (4) будет заведомо выполняться.

3. На основании изложенного выше случайные величины

$$\xi_i = \sqrt{\left(x_i^* - x_0\right)^2 + \left(y_i^* - x_0\right)^2} - \rho; \quad i = \overline{1, n}$$

являются приближенно (асимптотически) нормальными. Поэтому функция правдоподобия для $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ будет иметь вид

$$L=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{(x_i^*-x_0)^2+(y_i^*-y_0)^2}-\rho\right)^2\right\}.$$

Для оценивания величин (ρ, x_0, y_0) нужно минимизировать выражение

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{(x_i^*-x_0)^2+(y_i^*-y_0)^2}-\rho\right)^2,$$

т. е. вектор оценок $\hat{\Theta}^T=(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{r})$ надо определить так, чтобы сумма квадратов расстояний от точек (x_i^*, y_i^*), $i=\overline{1,n}$ до окружности радиуса $\hat{r}$ с центром в точке $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ была минимальной (нелинейная ортогональная регрессия). Для нелинейной регрессии в общем случае не дается получить точное решение, минимизирующее функционал φ, и поэтому минимум находится численными методами посредством линеаризации задачи и последовательных приближений. Задавшись начальным приближением $\hat{\Theta}_1^T=(\hat{x}_0^1, \hat{y}_0^1, \hat{r}^1)$, можно разложить функции $h_i=\sqrt{(x_i^*-\hat{x}_0^1)^2+(y_i^*-\hat{y}_0^1)^2}-\hat{r}^1$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\Theta_{\text{ист}}^T=(x_0, y_0, \rho)$, сохранив лишь члены первого порядка малости, а именно:

$$h_i\simeq\sqrt{(x_i^{\text{ист}}-x_0)^2+(y_i^{\text{ист}}-y_0)^2}-\rho-\frac{(x_i^*-\hat{x}_0^1)}{\sqrt{(x_i^*-\hat{x}_0^1)^2+(y_i^*-\hat{y}_0^1)^2}}\Delta x_0^1-$$

$$-\Delta r^1-\frac{(y_i^*-\hat{y}_0^1)}{\sqrt{(x_i^*-\hat{x}_0^1)^2+(y_i^*-\hat{y}_0^1)^2}}\Delta y_0^1+\frac{(x_i^*-\hat{x}_0^1)}{\sqrt{(x_i^*-\hat{x}_0^1)^2+(y_i^*-\hat{y}_0^1)^2}}\xi_i+$$

$$+\frac{(y_i^*-\hat{y}_0^1)}{\sqrt{(x_i^*-\hat{x}_0^1)^2+(y_i^*-\hat{y}_0^1)^2}}\eta_i.$$

Так как $\sqrt{(x_i^{\text{ист}}-x_0)^2+(y_i^{\text{ист}}-y_0)^2}-\rho=0$, то задача сведена к линейной, с неизвестными параметрами $\Delta\Theta_1^T=(\Delta x_0^1, \Delta y_0^1, \Delta r^1)$. Метод максимального правдоподобия непосредственно приводит к следующим оценкам для вектора параметров $\Delta\Theta_k^T=(\Delta x_0^k, \Delta\hat{y}_0^k, \Delta\hat{r}^k)$:

$$\Delta\hat{\Theta}_k=-(A_k^TA_k)^{-1}A_k^TV_k,$$

где матрица $A_k\equiv(a_{ij})_k\equiv\left\{\frac{\partial h_i}{\partial\Theta_j}\right\}_k$ имеет следующий вид:

$$A_k=\begin{pmatrix}\frac{x_1^*-\hat{x}_0^k}{\sqrt{(x_1^*-\hat{x}_0^k)^2+(y_1^*-\hat{y}_0^k)^2}} & \frac{y_1^*-\hat{y}_0^k}{\sqrt{(x_1^*-\hat{x}_0^k)^2+(y_1^*-\hat{y}_0^k)^2}} & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{x_n^*-\hat{x}_0^k}{\sqrt{(x_n^*-\hat{x}_0^k)^2+(y_n^*-\hat{y}_0^k)^2}} & \frac{y_n^*-\hat{y}_0^k}{\sqrt{(x_n^*-\hat{x}_0^k)^2+(y_n^*-\hat{y}_0^k)^2}} & 1\end{pmatrix},$$

а вектор $V_k=\{h_i^k\}$. Тогда $\hat{\Theta}_{k+1}=\hat{\Theta}_k+\Delta\hat{\Theta}_k$ на $(k+1)$-м шаге.

После того, как уточнение получено, ошибки параметров задаются обратной матрицей системы нормальных уравнений и проводится, как обычно, проверка гипотез относительно модели регрессии.

В [5] показано, что при некоторых довольно общих условиях сходимость рассмотренной выше процедуры Гаусса — Ньютона всегда будет иметь место, если ввести скалярный множитель $0 \leqslant q \leqslant 1$ и исправленные значения оценок параметров записывать в виде

$$\hat{\Theta}_{k+1} = \hat{\Theta}_k + q\Delta\hat{\Theta}_k.$$

Далее, заметим, что предложенная модификация процедуры Гаусса — Ньютона эквивалентна регуляризации неустойчивых решений, что в данном случае может быть связано с тем, что у некоторых параметров велики коэффициенты корреляции, т. е. матрица нормальных уравнений почти особенная и математически правильное решение «возмущенной» системы может быть очень далеким от истинного. Как известно [6], решение плохо обусловленной системы имеет лишь устойчивую проекцию на подпространство, образованное собственными векторами матрицы A^TA, соответствующими большим собственным значениям, и является «наименее определенным» в направлениях собственных векторов, соответствующих малым собственным значениям. Исходя из этих соображений, можно утверждать, что процедура Гаусса — Ньютона будет всегда сходиться к истинному решению, если матрица нормальных уравнений A^TA будет хорошо обусловленной. Для анализа точности получаемых точечных оценок $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{r})$ найдем собственные значения матрицы A^TA и дисперсии этих оценок, задавшись следующей идеализированной схемой. Допустим, что полученные отсчеты расположены симметрично относительно осей $x=x_0$ и $y=y_0$. Тогда, учитывая, что $x_i - x_0 = \rho\cos\varphi_i$, $y_i - y_0 = \rho\sin\varphi_i$, матрица A^TA будет иметь следующий вид:

$$A^TA = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2\varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix},$$

так как

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\varphi_i = \sum_{i=1}^{n}\sin\varphi_i = \sum_{i=1}^{n}\cos\varphi_i\sin\varphi_i = 0.$$

Видно, что матрица A^TA ортогональная, и, следовательно, итерационный процесс должен достаточно быстро сходиться. Далее, если сканирование производится вдоль оси x, то решение будет иметь наименьшую точность в направлении y, так как в этом случае собственное значение $\mu_{\hat{y}_0} = \sum\limits_1^n \sin^2\varphi_i < \sum\limits_1^n \cos^2\varphi_i < n = \mu_{\hat{r}}$. При этом дисперсии оцениваемых параметров будут равны соответственно:

$$\sigma^2_{\hat{r}} = \frac{\sigma^2_\xi}{n}; \quad \sigma^2_{\hat{x}_0} = \frac{\sigma^2_\xi}{\sum\limits_1^n \cos^2\varphi_i}; \quad \sigma^2_{\hat{y}_0} = \frac{\sigma^2_\xi}{\sum\limits_1^n \sin^2\varphi_i},$$

где σ^2_ξ — дисперсия измеряемых величин (x_i^*, y_i^*). Из этого следует, что если вести сканирование как вдоль оси x, так и вдоль оси y (т. е. $\sum\limits_1^n \cos^2\varphi_i = \sum\limits_1^n \sin^2\varphi_i$), то оценки параметров $\hat{x}_0$ и $\hat{y}_0$ будут равноточными.

В качестве примера рассмотрим сканирование вдоль оси x изображения, заданного аналитическим описанием (1):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2.$$

При моделировании задавались следующие параметры: $r_л=5$ мкм; $\sigma_\xi^2=6{,}5$; $\rho=50$ мкм; $x_0=500$ мкм; $y_0=300$ мкм; число отсчетов $n=20$. Оценивались координаты центра объекта (x_0, y_0) и радиус ρ, исследовалась сходимость итерационного процесса и его устойчивость к выбору начального приближения.

k	$\hat{x}_0^k$	$\hat{y}_0^k$	$\hat{r}^k$	$\Delta \hat{x}_0^k$	$\Delta \hat{y}_0^k$	$\Delta \hat{r}^k$
1	496,27	295,73	36,42	18,73	42,27	14,52
2	500,57	299,67	49,21	$-4{,}30$	$-3{,}94$	$-12{,}80$
3	500,54	299,67	49,38	$3{,}6\cdot10^{-2}$	$5{,}9\cdot10^{-3}$	$-1{,}6\cdot10^{-1}$
4	500,54	299,67	49,38	$-8{,}6\cdot10^{-5}$	$-2{,}8\cdot10^{-4}$	$-2{,}2\cdot10^{-6}$

Из таблицы видно, что уже на третьем шаге процесс сходится. Дисперсии полученных оценок следующие:

$$\sigma^2_{\hat{r}_0}=0{,}05\sigma_\xi^2;\ \sigma^2_{\hat{x}_0}=0{,}08\sigma_\xi^2;\ \sigma^2_{\hat{y}_0}=0{,}15\sigma_\xi^2.$$

Результаты моделирования вполне соответствуют изложенным выше теоретическим предпосылкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. М., «Советское радио», 1969.
2. F. T. S. Yu. Markov Photographic Noise.— Journal of the Optical Society of America, 1969, v. 59, № 3.
3. С. Б. Гуревич, И. И. Брейдо, Г. А. Гаврилов. Зависимость фотографических шумов от относительного количества проявленных зерен.— Журнал научной и прикладной фотографии и кинематографии, 1962, т. 7, № 4.
4. И. И. Брейдо. Разрешающая способность фотоматериалов к точечным изображениям и рост диаметра фотографического изображения точки с увеличением освещенности.— Астрономический журнал, 1971, т. 48, вып. 2.
5. H. O. Hartley. The Modified Gauss — Newton Method for the Fitting of Non-linear Regression Functions by Least Squares.— Technometrics, 1961, v. 3, № 2.
6. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. О плохо обусловленных системах линейных уравнений.— Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, т. 1, № 3.

Поступила в редакцию
10 ноября 1971 г.