

Ю. В. ГЛОБЕНКО, Г. И. СКРЫПНИК  
 (Москва)

### О РАЗРЕШЕНИИ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

**Введение.** К современным радиоизмерительным системам предъявляется требование высокой точности определения параметров в широком интервале их изменения. Выполнение этого противоречивого требования приводит в общем случае к многоканальному способу изменения величин. Характерным примером такого построения может служить фазометрическая система.

В основе многошкальных измерений лежит преобразование пространственного или временного масштаба определяемой величины. Не нарушая общности рассмотрения, можно принять, что искомая величина удовлетворяет соотношениям подобия следующего вида:

$$x = \frac{k_1 + \varphi_1}{d_1} = \frac{k_2 + \varphi_2}{d_2} = \dots = \frac{k_m + \varphi_m}{d_m}, \quad \varphi_i = \{\hat{\varphi}_i - \psi_i\}^+. \quad (1)$$

Здесь  $x$  — восстанавливаемая величина, принимающая значения из интервала  $[0; 1 - \varepsilon)$ ,  $0 \leq \varepsilon < 1$ ;  $k_i = [d_i x]^+$ ;  $\varphi_i = \{d_i x\}^+ \equiv d_i x - [d_i x]^+ -$  соответственно целая и дробная части\* от  $d_i x$ ;  $\psi_i = \left\{ \hat{\varphi}_i - \varphi_i + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2} -$  ошибка измерения  $i$ -дробной части  $\left( |\psi_i| < \frac{1}{2} \right)$ ;  $d_i$  — масштабный ко-

эффициент  $i$ -шкалы. Основная задача\*\*, возникающая при восстановлении величины, состоит в определении целого числа  $k_m$  в шкале с наибольшим масштабом по результатам измерений дробных частей  $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m$ .

С формальной точки зрения устранение многозначности можно рассматривать как процесс решения неполной системы уравнений (1) относительно целых чисел  $k_1, \dots, k_m$  при заданном характере ошибок изме-

\* В дальнейшем функции теории чисел обозначаются скобками принятой в [1] конфигурации с отличительным знаком «+». Отметим, что функция  $z = [y]^+$  определяется как наибольшее целое, не превосходящее  $y$ .

\*\* Впервые задача разрешения многозначности циклических измерений возникла при определении порядка интерференции в оптических системах. В начале текущего столетия Массе де Лепинэ предложил удобный метод определения порядка интерференции, получивший название способа совпадения дробных частей [2]. Этот метод несет по существу все элементы информационного подхода, используемого ниже для решения задачи.

рений. Очевидно, в силу соотношений (1) достаточно разрешить неоднозначность измерений по одной, например,  $m$ -шкале. В этом случае имеем

$$x_m = \frac{k_m + \hat{\varphi}_m}{d_m}.$$

Здесь  $\hat{k}_m(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m)$  — оценка числа циклов по  $m$ -шкале.

В современных радиоизмерительных системах, как правило, используются упрощенные методы устранения многозначности, состоящие в последовательном пересчете измерений из менее точной в более точную шкалу. При этом осуществляется формирование однозначной шкалы и в каждой ступени устранения многозначности участвуют два уравнения из системы (1). Сравнение подобных измерительных средств, оценка оптимальности используемых алгоритмов и принимаемых технических решений затруднены ввиду отсутствия достаточно разработанной теории многошкальных систем.

**1. Информационная схема измерений.** Для ступени разрешения ( $i, m$ ) можно получить из (1)

$$\frac{d_i}{d_m} k_m = \varphi_i - \frac{d_i}{d_m} \varphi_m + k_i.$$

После выделения дробной части имеем:

$$a_m^{(i)} = \left\{ \frac{d_i}{d_m} k_m \right\}^+; \quad b_m^{(i)} = \left\{ \varphi_i - \frac{d_i}{d_m} \varphi_m \right\}^+ \quad (2)$$

$$a_m^{(i)} \equiv b_m^{(i)}; \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Подставляя в (2) выражения для  $\hat{\varphi}_i$  и  $\varphi_m$  и принимая во внимание равенство  $a_m^{(i)} k_m \equiv \left\{ \frac{d_i}{d_m} k_m \right\}^+ \equiv b_m^{(i)}$ , после несложных преобразований получим:

$$b_m^{(i)} = \{a_m^{(i)}(k'_m) + \psi_m^{(i)}\}^+; \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (3)$$

где

$$a_m^{(i)}(k'_m) = \left\{ \frac{d_i k'_m}{d_m} \right\}^+, \quad k'_m = k_m + [\varphi_m + \psi_m]^+, \quad \psi_m^{(i)} = \varphi_i - \frac{d_i}{d_m} \varphi_m.$$

Заметим, что замена  $k_m$  величиной  $k'_m = k_m + [\varphi_m + \psi_m]^+$  обусловлена перебросами на  $\pm 1$ , вызванными ошибками в  $m$ -шкале.

С помощью соотношений (3) можно построить информационную схему — источник информации, кодирование, канал, декодирование, по которой производится решение задачи о восстановлении величины  $x_0$ . Она включает (рис. 1) источник информации  $N'_m(\psi_m)$  целых чисел  $k'_m = k_m + [\varphi_m + \psi_m]^+$ , который определяется при  $0 \leq x < 1 - \varepsilon$  и  $\psi_m = \text{const}$ . Нетрудно проследить, что отклонение множества  $N'_m(\psi_m)$  от  $N'_m(0)$  на  $\Delta k = [\varphi_m + \psi_m]^+ = \pm 1$  проявляется на концах интервала  $[0, 1 - \varepsilon]$ . Алфавит  $A'_m$  определяется в пространстве символов  $\Lambda_m$  в виде дискретного множества, составленного из различных значений вектор-функции  $a_m(k'_m) = (a_m^{(1)}(k'_m), \dots, a_m^{(m-1)}(k'_m))$ , рассматриваемой на множестве  $\tilde{N}'_m = N'_m(\tilde{\psi}_m)$  с наибольшим числом элементов. Кодер при фиксированном значении ошибки  $\psi_m$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств  $N'_m$  и  $A'_m$  и посылает символ  $a_m(k'_m) \in A'_m$

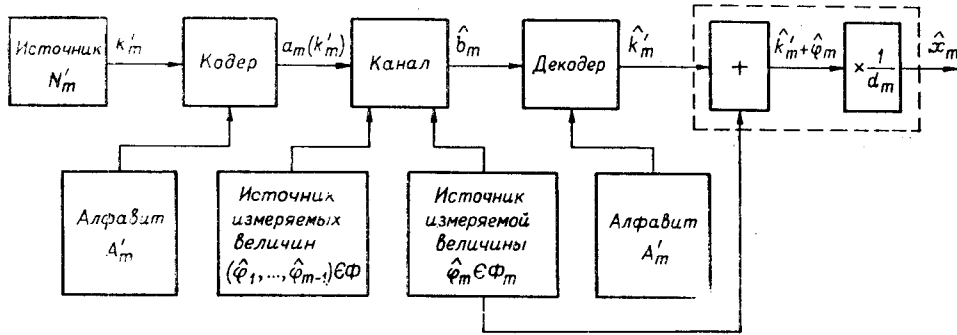


Рис. 1. Информационная схема измерений.

в канал. Входом канала служит дискретное множество  $A'_m$ , а выходом — непрерывное множество, содержащееся внутри  $(m-1)$ -мерного единичного куба  $\theta_{m-1}$  пространства  $\Lambda_m$ . Канал характеризуется условной плотностью вероятностей  $\omega(\hat{b}_m/a(k'_m))$ . Декодер в соответствии с решающей схемой определяет по  $\hat{b}_m = (\hat{b}_m^{(1)}, \dots, \hat{b}_m^{(m-1)})$  конкретное значение числа  $\hat{k}'_m = \tilde{k}'_m + \Delta k$ . Далее в информационной схеме осуществляются операции, приводящие к образованию величины

$$x_m = \frac{\hat{k}'_m + \varphi_m}{d_m} = \frac{k_m + \varphi_m + \psi_m}{d_m}. \quad (4)$$

Анализируя данное соотношение, можно заключить, что перебросы в  $m$ -шкале проявляются при определении  $\hat{k}'_m$  лишь на концах интервала  $[0; 1-\varepsilon)$ . Концевой эффект можно исключить из рассмотрения соответствующим выбором числа  $\varepsilon$ . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** При  $\varepsilon = 1/d_m$ ,  $|\psi_m| < \frac{1}{2}$ ,  $\{d_m\}^+ = 0$  условие однозначности имеет вид:

$$d_m = q_m = \text{НОК}(q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(m-1)}), \quad \frac{q_i^{(m)}}{q_m^{(i)}} \equiv \frac{d_i}{d_m}; \quad (q_i^{(m)}, q_m^{(i)})^+ = 1, \quad (5)$$

а множество  $A'_m$  совпадает с алфавитом  $A_m$ , отвечающим изменению  $x$  в интервале  $[0; 1)$  при отсутствии ошибок по  $m$ -шкале.

Доказательство дано в приложении. Таким образом, можно сохранить основные представления идеальной схемы измерений, если уменьшить однозначный интервал восстанавливаемой величины\*. Ниже предполагается, что условия теоремы 1 выполнены.

Отметим одно важное свойство алфавита  $A_m$ . Введем следующее преобразование масштабных коэффициентов:

$$\left\{ \frac{d_i^*}{d_m^*} \right\}^+ = \left\{ \frac{d_i t}{d_m} \right\}^+, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad d_m^* = d_m = q_m, \quad (6)$$

где  $t$  — любое целое число взаимно простое с  $q_m$ . Имеет место следующая теорема.

\* Перевод произвольного интервала  $\alpha \leq x' < \beta$  в  $[0; 1-1/d_m]$  осуществляет преобразование

$$x = (x' - \alpha) \frac{1 - 1/d_m}{\beta - \alpha}; \quad d_l = d'_l \frac{\beta - \alpha}{1 - 1/d_m}; \quad \varphi_l = \{\varphi'_l - \alpha d'_l\}^+; \quad k_l = [k'_l + \varphi'_l - \alpha d'_l]^+;$$

$l = 1, 2, \dots, m$ . Заметим, что  $d_m = d'_m (\beta - \alpha) + 1$ .

**Теорема 2.** Алфавит  $A_m$ , отвечающий масштабам  $d_1, \dots, d_m$ , инвариантен относительно преобразования (6). Переход к новым масштабам приводит к перенумерации элементов множества  $A_m$ . Доказательство приводится в приложении.

**2. Алгоритм разрешения неоднозначности.** Произведем построение информационного канала, предполагая известным совместное распределение вероятностей ошибок измерений. Введем многомерную случайную величину  $z_m^{(i)} = \left\{ \psi_m^{(i)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}$ ;  $i=1, \dots, m-1$  с плотностью вероятностей  $g(z_m^{(1)}, \dots, z_m^{(m-1)})$ . Тогда из соотношения (3) следует, что

$$z_m^{(i)} = \left\{ \hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)}(k'_m) + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}; \quad i=1, \dots, m-1. \quad (7)$$

Учитывая далее, что  $dz_m^{(i)}/db_m^{(i)} = 1$  (за исключением дискретного множества  $\hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)}(k'_m) + \frac{1}{2} = j$  ( $j=0; 1$ ) меры 0), нетрудно получить следующее выражение для условной плотности вероятностей канала:  $w(\hat{b}_m/a_m(k'_m)) = g\left(\left\{ \hat{b}_m^{(1)} - a_m^{(1)}(k'_m) + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}, \dots, \left\{ \hat{b}_m^{(m-1)} - a_m^{(m-1)}(k'_m) + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}\right)$ .

Данное распределение определяет полунепрерывный аддитивный канал с дискретным входом  $a_m(k'_m) \in A'_m = A_m$  и непрерывным выходом  $\hat{b}_m \in \theta_{m-1}$ . Аддитивность канала проявляется в том, что энтропия  $H(\theta_{m-1}/A_m)$  не зависит от распределения  $p(a_m)$  на входе. Это означает, что шум в канале в одинаковой степени нарушает передачу каждого из возможных входных символов  $a_m(k'_m)$  [3].

Как известно [4], одним из критериев для оптимальной решающей схемы, разбивающей в соответствии с алфавитом выходное множество  $\theta_{m-1}$  на  $q_m$  непересекающихся множеств  $B^{(0)}, \dots, B^{(k'_m)}, \dots, B^{(a_m-1)}$ , является максимум апостериорной вероятности  $P(a_m(k'_m)/\hat{b}_m)$ . Оптимальное правило декодирования имеет вид

$$\sup_{a_m \in A_m} p(a_m) g\left(\left\{ \hat{b}_m^{(1)} - a_m^{(1)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}, \dots, \left\{ \hat{b}_m^{(m-1)} - a_m^{(m-1)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}\right) = p(\hat{a}_m) g\left(\left\{ \hat{b}_m^{(1)} - \hat{a}_m^{(1)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}, \dots, \left\{ \hat{b}_m^{(m-1)} - \hat{a}_m^{(m-1)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}\right); \quad \hat{a}_m \rightarrow \hat{k}'_m. \quad (8)$$

Если вероятности входных сообщений  $p(a_m)$  неизвестны, то решающая схема строится по максимуму правдоподобия  $L(a_m) = w(\hat{b}_m/a_m)$ . В рассматриваемом случае можно определить следующий алгоритм разрешения неоднозначности\*

$$\sup_{a_m \in A_m} q\left(\left\{ \hat{b}_m^{(1)} - a_m^{(1)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}, \dots, \left\{ \hat{b}_m^{(m-1)} - a_m^{(m-1)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}\right) =$$

\* Если возможны ситуации, когда существует максимум, то в этих случаях  $\sup$  (верхняя грань) заменяется на  $\max$  и оценка называется максимально правдоподобной. Последнее имеет место, если точная верхняя грань функции  $g(z_m)$  достигается в некоторой точке алфавита.

$$= g \left( \left\{ \hat{b}_m^{(1)} - \hat{a}_m^{(1)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}, \dots, \left\{ \hat{b}_m^{(m-1)} - \hat{a}_m^{(m-1)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2} \right);$$

$$\hat{a}_m \rightarrow k'_m. \quad (9)$$

Декодирование по максимуму апостериорной вероятности (или по максимуму правдоподобия при равновероятных входных сообщениях) является оптимальным в том смысле, что оно минимизирует среднее значение вероятности ошибки [4]

$$P(e) = 1 - \sum_{a_m \in A_m} p(a_m) P(B^{(k'_m)} | a_m(k'_m)).$$

Здесь

$$P(B^{(k'_m)} | a_m(k'_m)) = \int_{B^{(k'_m)}} \omega(\hat{b}_m / a_m) d\hat{b}_m -$$

вероятность попадания символа  $\hat{b}_m$  в  $(m-1)$ -мерную область  $B^{(k'_m)}$ . Правило (9), в свою очередь, минимизирует вероятность ошибки  $p(e) = 1 - P(B^{(k'_m)} | a_m(k'_m))$ , возникающей при определении конкретно посылаемого сообщения  $a_m(k'_m)$ .

Таким образом, соотношения (8) и (9) дают общее решение задачи устранения многозначности. Решающую схему  $B^{(0)}, \dots, B^{(k'_m)}, \dots, B^{(q_m-1)}$ , необходимую для расчета вероятности ошибки, можно рассматривать как эквивалентную форму представления алгоритмов, в ряде случаев более удобную для реализации. Следует подчеркнуть, что никакая решающая схема не в состоянии устранить априорную неопределенность между  $k'_m$  и  $a_m$ , возникающую при нарушении условия однозначности.

Установим некоторые общие свойства решающей схемы, построенной с помощью алгоритма (9). Нетрудно показать, что

$$P(B^{(k'_m)} | a_m(k'_m)) = \int_{B^{(k'_m)}} \omega(\hat{b}_m / a_m) d\hat{b}_m = \int_{R^{(k'_m)}} g(z_m) dz_m. \quad (10)$$

Здесь  $z_m = (z_m^{(1)}, \dots, z_m^{(m-1)}) \in \Lambda_m$ ;  $R^{(k'_m)}$  — отображение в  $\Lambda_m$  множества  $B^{(k'_m)}$  с помощью преобразования (7). Будем называть решающую схему равномерной, если вероятность  $P(B^{(k'_m)} | a_m(k'_m)) = 1 - e$  не зависит от  $k'_m$ . Из соотношения (10) следует, что решающая схема равномерна при выполнении равенств  $R^{(0)} = R^{(1)} = \dots = R^{(q_m-1)}$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** Разбиение единичного куба  $\theta_{m-1}$  с помощью алгоритма (9) на  $q_m$  непересекающихся множеств  $B^{(0)}, \dots, B^{(k'_m)}, \dots, B^{(q_m-1)}$  образует при  $d_m = q_m$  равномерную решающую схему. При этом

$$P(e) = p(e) = 1 - \int_R g(z_m) dz_m. \quad (11)$$

Доказательство теоремы приводится в приложении. Из изложенного выше также следует, что независимо от  $K'_m$  объем фигур  $B^{(0)}, \dots, B^{(q_m-1)}$  один и тот же, т. е.  $V_R = V_{B^{(k'_m)}}$ . Поскольку множества

$B^{(0)}, \dots, B^{(k'_m)}, \dots, B^{(q_{m-1})}$  содержатся внутри  $(m-1)$ -мерного куба  $\Theta_{m-1}$  единичного объема, то суммарный объем данных фигур не может превышать 1, т. е.

$$q_m V_R \leq 1. \quad (12)$$

При знаке равенства имеет место плотная упаковка фигур в кубе. Очевидно, решающая схема плотно упакована, если алгоритм (9) любому  $\hat{b}_m \in \Theta_{m-1}$  всегда приписывает некоторое число  $a_m(k'_m) \in A_m$ .

Предположим, что ошибки в  $m$ -шкале отсутствуют ( $\psi_m = 0$ ) и определена совместная плотность вероятностей ошибок измерений в остальных шкалах  $\omega(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$ . Тогда  $z_m^{(i)} = \psi_i$  и в алгоритме (9) необходимо положить  $g(z_m) = \omega(z_m^{(1)}, \dots, z_m^{(m-1)})$ .

**Теорема 4.** Если ошибки в  $m$ -шкале отсутствуют ( $\psi_m = 0$ ), а в остальных шкалах зависят только от номера шкалы, то при любом характере ошибок фигура  $R$  и вероятность  $p(e)$  инвариантны относительно преобразования (6). Трансформация масштабов приводит к перенумерации множеств  $B^{(k'_m)}$  решающей схемы. Утверждения этой теоремы непосредственно вытекают из теоремы 2, так как по условию функция  $g(z_m)$ , а следовательно, и оптимальная решающая схема не зависят от преобразования масштабов (6).

Допустим теперь, что ошибки измерений ограничены. Тогда функция  $g(z_m)$  отлична от нуля внутри некоторой области  $\Delta \in \Lambda_m$ . Очевидно, можно произвести безошибочное устранение многозначности, если существует решающая схема с отображением  $R$ , полностью содержащим фигуру  $\Delta$ . В этом случае  $P(B^{(k'_m)} / a(k'_m)) = 1$  и  $p(e) = 0$ . С другой стороны, любая решающая схема задает допустимую область изменения ошибок  $R$ , при которой рассеяние информации в канале отсутствует. Следовательно, область  $R$  может быть определена в виде совокупности условий, обеспечивающих безошибочное нахождение чисел  $k'_m$ .

**3. Дискреты алфавита.** Рассмотрим равномерную решающую схему, образованную простейшими фигурами-брусками. Отображение  $R$  данной схемы представляет  $(m-1)$ -мерный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям\*. С помощью (9) можно показать, что данная схема оптимальна, если  $\psi_m = 0$  ( $z_m^{(i)} = \psi_i$ ) и функция  $\omega(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$  постоянна на бруске  $-\Delta_1 \leq \psi_1 < \Delta_1, \dots, -\Delta_{m-1} \leq \psi_{m-1} < \Delta_{m-1}$ , подобном  $R$ , а вне его равна нулю. Следовательно, все результаты предыдущего раздела справедливы для данного случая.

Для построения решающей схемы необходимо определить расстояние между элементами  $a_m^{(i)} \in A_m^{(i)}$  и  $\hat{b}_m^{(i)} \in \Lambda_m^{(i)}$  степени. Исходя из преобразования (7), его можно ввести единственным образом:

$$r_i(\hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)}) = \left\{ \left[ \hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)} + \frac{1}{2} \right]^+ - \frac{1}{2} \right\}. \quad (13)$$

Будем называть дискретами алфавита  $A_m$  бруски  $D^{(0)}, \dots, D^{(q_{m-1})}$ , удовлетворяющие следующим требованиям:

1) внутри бруска находится только одна точка алфавита, совпадающая с его центром; 2) отображение  $R$  любого бруска образует  $(m-1)$ -мерный параллелепипед; 3) соприкасающиеся грани брусков делят пополам ортогональную проекцию  $r_i$  между двумя точками алфавита; 4) минимальное ребро дискрета является наибольшим при всевоз-

\* Под  $i$ -координатной плоскостью понимается гиперплоскость в  $\Lambda_m \hat{b}_m^{(i)} = 0$ , ортогональная  $i$ -координате.

можных разбиениях  $\theta_{m-1}$  на бруски; 5) при выполнении п. 4 объем параллелепипеда  $V_R$  является наибольшим.

Зафиксируем некоторую точку  $a_m^{(i)}(k'_m) \in A_m^{(i)}$  и введем расстояние до произвольной точки  $a_m^{(i)}(k_m^*)$

$$r_i(s) = \left| \left\{ a_m^{*(i)} - a_m^{(i)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2} \right| = \left| \left\{ \frac{q_i^{(m)}}{q_m^{(i)}} s + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2} \right|,$$

где параметр  $s = k_m^* - k'_m$  принимает значения из множества  $H(s)$ :  $-k'_m, -k'_m + 1, \dots, -1, 1, \dots, q_m - k'_m - 1$ . Тогда ребра дискрета могут быть определены по следующей схеме.

1. Выделяем из  $H(s)$  подмножество  $H_i(s)$ , на котором выполняется система неравенств

$$r_i(s) \geq r_l(s); \quad l = 1, \dots, m-1. \quad (14)$$

2. Находим величину

$$r_i(s_i) = \min_{s \in H_i(s)} r_i(s); \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (15)$$

3. Отождествляем с ребром дискрета  $2\delta_i$  по  $i$ -координате величину  $r_i(s_i)$ , удовлетворяющую системе неравенств:

$$r_i(s_i) > r_l(s_i); \quad l = 1, \dots, m-1; \quad l \neq i. \quad (16)$$

Здесь  $s_l$  — точка  $H_l(s)$ , доставляющая минимум  $r_l$ .

4. Если при некоторых  $i$  и  $l$  соотношение (16) нарушается, то точка  $s_l$  из множества  $H_l(s)$  выбрасывается и процедура нахождения ребра  $2\delta_i$  повторяется. Расчет заканчивается, если все ребра дискрета удовлетворяют неравенствам (16).

5. Если в результате перебора трансформированное множество  $\tilde{H}_j(s)$  оказывается пустым, то принимается  $2\delta_j = 1$ .

В данной схеме совокупность операций (14) и (15) обусловлена требованием пп. 3 и 4. Ограничение (16) и следующая за ним процедура обеспечивают формирование параллелепипеда  $R$  наибольшего объема. Последнее достигается тем, что все точки алфавита, доставляющие минимум в соотношении (15), находятся на поверхности бруска с удвоенным значением ребер  $4\delta_i$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ). Можно показать, что дискрет определяется единственным образом в том случае, когда множества  $H_i(s)$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) не имеют общих точек. В противном случае ребра дискрета могут зависеть от направления перебора. При этом, однако, минимальное ребро дискрета  $\min_i 2\delta_i$  будет одним и тем же. Заме-

тим, что из свойств дробной части следует равенство  $2\delta_j = t_j/q_m^{(j)}$ .

Здесь  $t_j, q_m^{(j)}$  — целые числа и  $t_j \leq q_m^{(j)}/2$  (в схеме доопределяется значение  $t_j = q_m^{(j)}$ ).

В общем случае нахождение ребер дискрета требует перебора на конечном множестве  $A_m$ , осуществляемого на ЭЦВМ при конкретных значениях масштабных коэффициентов. Однако при плотной упаковке дискретов в кубе  $\theta_{m-1}$  процедуру расчета ребер можно упростить и в ряде случаев выполнить в общем виде.

Сформулируем несколько теорем.

**Теорема 5.** Если в представлении  $d_i/d_m \equiv q_i^{(m)}/q_m^{(i)}, (q_i^{(m)}, q_m^{(i)})^+ = 1$  числа  $q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(m-1)}$  попарно простые и  $d_m = q_m = \prod_{i=1}^{m-1} q_m^{(i)}$ , то независимо от чисел  $q_i^{(m)}$  величина дискрета равна

$$2\delta_i = \frac{1}{q_m^{(i)}}; \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (17)$$

Теорема 6. Если  $q_m^{(i)} = [q_m^{(1)}]^i$  и  $d_m = q_m = [q_m^{(1)}]^{m-1}$ , то независимо от чисел  $q_i^{(m)}$  величина дискрета равна

$$2\delta_i = \frac{1}{q_m^{(1)}}; \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (18)$$

Легко проверить, что суммарный объем брусков с ребрами (17) и (18) равен 1. Доказательство теорем проводилось по схеме (14)–(16) с помощью аппарата сравнений теории чисел [5] и ввиду громоздкости изложения опущено. Теория чисел позволяет также найти условие существования брусков, удовлетворяющих равенству (12). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. Если для некоторого набора чисел  $\mu^{(\alpha)} = (\mu_1^{(\alpha)}, \dots, \mu_{m-1}^{(\alpha)})$ , удовлетворяющего условиям

$$q_m^{(i)} \mid \mu_i^{(\alpha)}, \quad \prod_{i=1}^{m-1} \mu_i^{(\alpha)} = q_m,$$

найдется такое  $j_\alpha$ , что

$$\Gamma_{j_\alpha}^{(i)} = \left( \mu_i^{(\alpha)}, \frac{q_m^{(j_\alpha)}}{\left( q_m^{(j_\alpha)}, \frac{q_m^{(i)}}{\mu_i^{(\alpha)}} \right)^+} \right)^+ = 1; \quad i = 1, \dots, m-1; \quad i \neq j_\alpha,$$

то независимо от  $g_i^{(m)}$  существуют бруски с ребрами  $1/\mu_i^{(\alpha)}$  ( $i=1, \dots, m-1$ ), плотно упакованные в кубе  $\Theta_{m-1}$ . Дискреты алфавита образованы такими брусками, для которых

$$\max_{\alpha} \min_i \frac{1}{\mu_i^{(\alpha)}} = 2\delta_i^{(i*)}. \quad (19)$$

Здесь вертикальная черта характеризует свойство делимости числа  $q_m^{(i)}$  на  $\mu_i^{(\alpha)}$ , а скобками  $(x, y)^+$  обозначен наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$ . Заметим, что соотношения (17) и (18) являются частным случаем (19). Однако теорема 7 не дает достаточных условий существования плотно упакованных дискретов. Следует также подчеркнуть, что величина дискрета при плотной упаковке не зависит от чисел  $q_i^{(m)}$ , взаимно простых с  $q_m^{(i)}$ . Следовательно, одному и тому же дискрету отвечают разные наборы масштабных коэффициентов. Легко видеть, что данное множество включает наборы масштабов, удовлетворяющие преобразованию (6).

Решающую схему, составленную по дискретам алфавита, можно записать в виде системы неравенств

$$-\delta_i \leq \left\{ \hat{b}_m^{(i)} - \hat{a}_m^{(i)} + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2} < \delta_i; \quad i = 1, \dots, m-1; \quad \hat{a}_m \rightarrow \hat{k}'_m. \quad (20)$$

Если «рассогласование» символов  $a_m$  и  $\hat{b}_m$ , вызванное ошибками измерений, не превышает величины дискрета, то, очевидно, решающая схема (20) безошибочна. Последнее возможно, если

$$\Delta_m^{(i)} = \left| \left\{ \Delta_i + \frac{a_i}{d_m} \Delta_m + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2} \right| \leq \delta_i; \quad i = \dots, m-1. \quad (21)$$

Здесь  $\Delta_i$  — наибольшее абсолютное значение ошибки  $\psi_i$  в  $i$ -шкале.



**4. Свойства некоторых решающих схем.** Рассмотрим в качестве примера фазовый канал. Как известно [6], в этом случае плотность вероятностей ошибок в  $l$ -шкале имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_l(\psi_l) = & \left[ \exp\left(-\frac{U_l^2}{2}\right) + \sqrt{2\pi} U_l \cos(2\pi\psi_l) F(U_l \cos(2\pi\psi_l)) \times \right. \\ & \left. \times \exp\left\{-\frac{U_l^2 \sin^2(2\pi\psi_l)}{2}\right\} \right], \quad |\psi_l| \leq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $U_l^2 = \frac{E_l}{N_l}$ ;  $E_l, N_l$  — соответственно энергия сигнала и шума;

$F(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$  — функция Лапласа.

Предположим, что в  $m$ -шкале ошибки отсутствуют (или их вклад мал, т. е.  $d_i U_i \ll d_m U_m$ ), а в остальных шкалах измерения независимы. Тогда  $z_m^{(i)} \simeq \psi_i$  и в алгоритме (9) необходимо положить  $g(z_m) = \prod_{l=1}^{m-1} \times \omega_l(z_m^{(l)})$ . Заметим, что при малом отношении сигнала к шуму ( $U_l \ll 1$ ) плотность вероятностей  $\omega_l(\psi_l)$  стремится к постоянной величине 1 и алгоритм (9) дает разбиение  $\theta_{m-1}$  на бруски. В противоположном случае  $U_l \geq 3$  и при малом значении аргумента закон распределения (22) близок к нормальному:

$$\omega_l(\psi_l) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l} \exp\left(-\frac{\psi_l^2}{2\sigma_l^2}\right), \quad (23)$$

где  $\sigma_l = 1/2\pi U_l$ . Подставляя (23) в (9), после несложных преобразований получим

$$\inf_{a_m \in A_m} \sum_{l=1}^{m-1} \left[ \frac{r_l(\hat{b}_m^{(l)} - a_m^{(l)})}{\sigma_l} \right]^2 = \sum_{l=1}^m \left[ \frac{r_l(\hat{b}_m^{(l)} - \hat{a}_m^{(l)})}{\sigma_l} \right]^2; \quad \hat{a}_m \rightarrow \hat{k}_m. \quad (24)$$

В соответствии с (13) можно на  $A_m$  и  $\theta_{m-1}$  определить метрику

$$\rho(a_m, \hat{b}_m) = \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} \left[ \frac{r_l(a_m^{(l)} - \hat{b}_m^{(l)})}{\sigma_l} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (25)$$

Правило (24) всегда выбирает то значение  $\hat{a}_m$ , которое ближе всего к принимаемому символу  $\hat{b}_m$ . Данная решающая схема осуществляет декодирование по «минимуму расстояния» (25).

Наличие ошибок измерений в  $m$ -шкале вызывает зависимость случайных величин  $z_m^{(1)}, \dots, z_m^{(m-1)}$  даже и тогда, когда измерения по шкалам независимы. Это обстоятельство приводит к усложнению алгоритма. Расчет показывает, что в случае независимых измерений по шкалам с законом ошибок (23) и  $\sigma_m^2 \neq 0$  необходимо в (24) заменить  $\rho^2(a_m, \hat{b}_m)$  положительной определенной квадратичной формой\*

$$\begin{aligned} Q^2(a_m, \hat{b}_m) = & \sum_{i,k=1}^{m-1} \left( \frac{\delta_{ik}}{\sigma_i^2} - \frac{d_i d_k}{\Omega d_m^2 \sigma_i^2 \sigma_k^2} \right) \left[ \left( \hat{b}_m^{(i)} - a_m^{(i)} + \frac{1}{2} \right)^+ - \frac{1}{2} \right] \times \\ & \times \left[ \left( \hat{b}_m^{(k)} - a_m^{(k)} + \frac{1}{2} \right)^+ - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

\* Заметим, что декодированию по минимуму расстояния отвечает в решающей схеме фигура  $R$ , ограниченная плоскостями. При этом число сторон  $(m-1)$ -мерного многогранника должно быть больше или равно  $2(m-1)$ .

Здесь  $\delta_{ik}$  — символ Кронеккера;  $\Omega = \sum_{i=1}^m d_i^2/d_m^2 \sigma_i^2$ . Легко видеть, что при  $\sigma_m \rightarrow 0$  имеет место  $Q^2 \rightarrow \rho^2$ .

Рассмотрим распространенный в инженерной практике метод устранения многозначности, состоящий в последовательном пересчете измерений из одной шкалы в другую. Предположим, что  $d_1 \leq 1$  ( $k_1=0$ ) и  $d_1 < d_2 < \dots < d_m$ . Тогда, исходя из соотношений (1), можно составить следующую процедуру пересчета:

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 = 0, \hat{k}_2 = \left[ \frac{d_2}{d_1} \hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2 + \frac{1}{2} \right]^+, \hat{k}_3 = \left[ \frac{d_3}{d_2} (\hat{k}_2 + \hat{\varphi}_2) - \hat{\varphi}_3 + \frac{1}{2} \right]^+, \dots \\ \dots, \hat{k}_m = \left[ \frac{d_m}{d_{m-1}} (\hat{k}_{m-1} + \hat{\varphi}_{m-1}) - \hat{\varphi}_m + \frac{1}{2} \right]^+. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь число  $1/2$  введено для симметризации целой части. Если исключить перебросы в шкалах, то решающую схему, отвечающую алгоритму (27), можно рассматривать в  $\Theta_{m-1}$  как совокупность условий безошибочного определения чисел  $k'_m = k_m + [\varphi_m + \psi_m]^+$ . Подставим в (27) выражение  $\hat{\varphi}_i = \varphi_i + \psi_i - [\varphi_i + \psi_i]^+$  и потребуем  $[\varphi_i + \psi_i]^+ = 0$ . Нетрудно убедиться, что перебросы в промежуточных шкалах исключаются автоматически, и условие безошибочности имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \leq \frac{d_2}{d_1} \psi_1 - \psi_2 < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{d_3}{d_2} \psi_2 - \psi_3 < \frac{1}{2}, \dots \\ \dots, \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{d_m}{d_{m-1}} \psi_{m-1} - \psi_m < \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Допустим, что ошибки в  $m$ -шкале отсутствуют ( $\psi_m=0$ ). Тогда  $z_m^{(i)} = \psi$  и совокупность неравенства (28) определяет в пространстве  $\Lambda_m$  многогранник  $R$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \leq \frac{d_2}{d_1} z_m^{(1)} - z_m^{(2)} < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{d_3}{d_2} z_m^{(2)} - z_m^{(3)} < \frac{1}{2}, \dots \\ \dots, \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{d_m}{d_{m-1}} z_m^{(m-1)} < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (29)$$

лежащий в основе решающей схемы алгоритма (27). Если теперь в (29) выразить  $z_m$  с помощью соотношения (7) через  $a_m$  и  $b_m$ , то получаем искомую решающую схему  $B^{(0)}, \dots, B^{(q_{m-1})}$ . Исходя из выражения (9), можно показать, что данная схема оптимальна, если плотность вероятностей ошибок измерений  $w(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$  постоянна в области  $\Delta$ , подобной  $R$ , и вне ее равна нулю. Следовательно, утверждения раздела 2 (за исключением теоремы 4) остаются справедливыми и для схемы (29). Данная схема равномерна и плотно упакована в  $\Theta_{m-1}$  (т. е.  $V_{Rq_m}=1$ ), поскольку алгоритм (27) любому  $b_m \in \Theta_{m-1}$  всегда приписывает некоторое значение  $a_m \in A_m$ . Вероятность ошибки находится по формуле (11). Теорема 4 нарушается, так как при любом изменении масштабов промежуточных шкал (кроме  $d_1=1$  и  $d_m=\text{const}$ ) трансформируется область  $\Delta \sim R$ , а следовательно, и функция  $W(\psi_1, \dots, \psi_{m-1})$ .

Пример.

А. Выберем следующие масштабы:  $d_1=3$ ;  $d_2=8$ ,  $d_3=18$ : Тогда

$$\begin{aligned} m=3; \quad k'_3 \in N'_3: 0, 1, \dots, 17; \quad a_3^{(1)} = \left\{ \frac{1}{6} k'_3 \right\}^+; \quad a_3^{(2)} = \left\{ \frac{4}{9} k'_3 \right\}^+; \\ q_3^{(1)} = 2 \cdot 3; \quad q_3^{(2)} = 3^2; \quad q_3 = 18. \end{aligned}$$

В соответствии с теоремой 7 существуют два набора брусков, плотно упакованных в  $\theta_2$ ;

$$\alpha = 1; \mu_1^{(1)} = 2; \mu_2^{(1)} = 3^2; \Gamma_2^{(1)} = \left( 2, \frac{3^2}{\left( 3^2, \frac{2 \cdot 3}{2} \right)^+} \right)^+ = 1;$$

$$\alpha = 2; \mu_1^{(2)} = 2 \cdot 3; \mu_2^{(2)} = 3; \Gamma_1^{(2)} = \left( 3, \frac{2 \cdot 3}{\left( 2 \cdot 3, \frac{3^2}{3} \right)^+} \right)^+ = 1.$$

По формуле (19) находим  $2\delta_1 = 1/2 \cdot 3$ ,  $2\delta_2 = 1/3$ . На рис. 2 изображены точки алфавита  $A_3$ , разбиение квадрата  $\theta_2$  на дискреты ( $R_1$ ) и фигура  $R_2$ , лежащая в основе решающей схемы алгоритма (24) при  $\sigma_1 = \sigma_2$  ( $\sigma_3 = 0$ ). На рис. 3 приведены результаты расчета по формуле (11) вероятности ошибки схем  $R_1$  и  $R_2$  для различных значений параметра  $\delta_1/\sigma_1$ . Первая серия кривых отвечает равномерному распределению ошибок на прямоугольнике  $-\Delta_1 \leq \psi_1 < \Delta_1$ ,  $-\Delta_2 \leq \psi_2 < \Delta_2$  ( $\Delta_2 = 2\Delta_1$ ,  $\sigma_1 = \Delta_1 \sqrt{3}$ ), подобно дискрету  $R_1$ . Вторая серия кривых получена для нормального закона распределения ошибок ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\sigma_3 = 0$ ).

Б. Примем следующие значения масштабных коэффициентов:  $d_1 = 1$ ;  $d_2 = 5$ ;  $d_3 = 25$ . Основные характеристики системы:  $m = 3$ ;  $k'_3: 0, 1, \dots, 24$ ,  $a_3^{(1)} = \{1/25 \cdot k'_3\}^+$ ,  $a_3^{(2)} = \{1/5 k'_3\}^+$ ,  $q_3 = 25$ ,  $2\delta_1 = 2\delta_2 = 1/5$ . На рис. 4 изображены алфавит  $A_3$ , разбиение квадрата  $\theta_2$  на дискреты ( $R_1$ ), фигуры  $R_2$  и  $R_4$ , лежащие в основе решающих схем алгоритмов (24) ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ;  $\sigma_3 = 0$ ) и (27). Расчет показывает, что для нормального закона ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ,  $\sigma_3 = 0$ ) вероятность ошибки  $p(e)$  данных схем примерно одинакова и описывается кривой, приведенной на рис. 5. Заметим, что тот же дискрет отвечает масштабам:  $d_1^* = q_1$ ,  $d_2^* = 5q_2$ ,  $d_3^* = d_3 = 25$  числа  $q_1, q_2$  не кратны 5. В соответствии с (6) схема  $R_2$  инвариантна относительно преобразования масштабов  $d_1^* = 25 \{t/25\}$ ,  $d_2^* = 25 \{t/5\}^+$ ,  $d_3^* = d_3 = 25$ ,  $t$  не кратно 5. Фигура  $R_4$  трансформируется при любом изменении масштабов.

В. Положим  $d_1 = 7$ ,  $d_2 = 12$ ,  $d_3 = 14$ . Тогда  $m = 3$ ;  $k'_3 \in N'_3: 0, 1, \dots, 13$ ,  $a_3^{(1)} = \{1/2 k'_3\}^+$ ;  $a_3^{(2)} = \{6/7 k'_3\}^+$ ;  $q_3 = 14$ ;  $2\delta_1 = 1/2$ ;  $2\delta_2 = 1/7$ . Геометрические представления алгоритмов (20) (фигура  $R_1$ ), (24) ( $R_2 = R_1$ ;  $\sigma_1 = \sigma_2$ ) и (26) ( $R_3$ ;  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ), даны на рис. 6.

**Заключение.** Таким образом, общее решение задачи устранения многозначности по критериям максимума апостериорной вероятности и максимума правдоподобия дает соответственно алгоритмы (8) и (9). Им отвечает эквивалентная геометрическая форма представлений в виде решающей схемы  $B^{(0)}, \dots, B^{(k'_m)}, \dots, B^{(q_m-1)}$ , разбивающей единичный  $(m-1)$ -мерный куб  $\theta_{m-1}$  на  $q_m$  непересекающихся фигур. Решающая схема, построенная по максимуму правдоподобия, равномерна, фигуры  $B^{(k'_m)}$  имеют одинаковый объем и вероятность ошибки не зависит от номера цикла. Установленные выше свойства алфавита и решающих схем могут быть использованы для выбора соотношений масштабов, числа шкал системы. Следует отметить, что решающая схема допускает восстановление величины  $x$  по формуле (4) в аналоговом виде, если информация о дробных частях  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  содержится в непрерывных периодических процессах. Решающую схему можно также реализовать с помощью операции многомерного интервального сравнения. Алгорит-

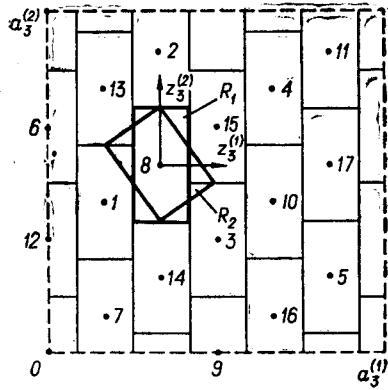


Рис. 2. Геометрические представления алфавита и решающих схем при  $m=3$ ,  $d_1=3$ ,  $d_2=8$ ,  $d_3=18$ .

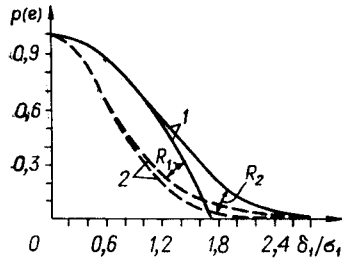


Рис. 3. Зависимость вероятности ошибки от параметра  $\delta/\sigma_1$  для решающих схем рис. 2:

1 — равномерный закон распределения ошибок ( $\Delta_2=2\Delta_1$ ;  $\sigma_1=\sqrt{3}\Delta_1$ );  
2 — нормальный закон распределения ошибок ( $\sigma_1=\sigma_2$  ( $\sigma_3=0$ )).

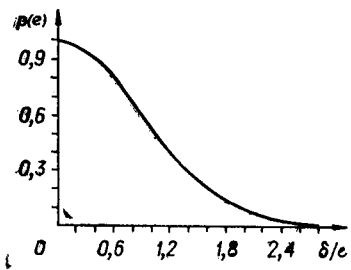


Рис. 5. Зависимость вероятности ошибки от параметра  $\delta/\sigma$  для решающих схем рис. 4. Нормальный закон распределения ошибок ( $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ ,  $\sigma_3=0$ ).

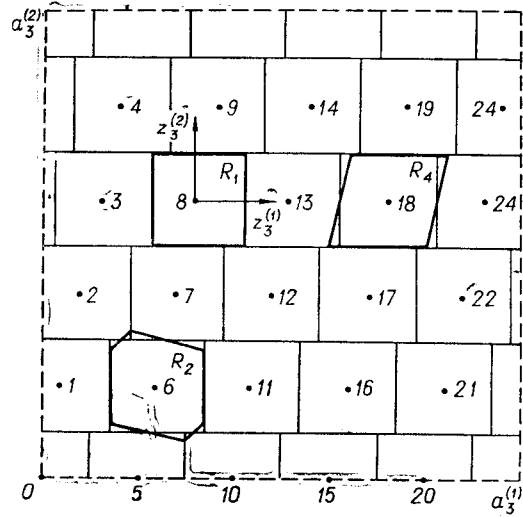


Рис. 4. Геометрические представления алфавита и решающих схем при  $m=3$ ,  $d_1=1$ ,  $d_2=5$ ,  $d_3=25$ .

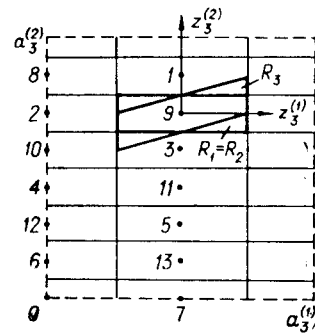


Рис. 6. Геометрические представления алфавита и решающих схем при  $m=3$ ,  $d_1=7$ ,  $d_2=12$ ,  $d_3=14$ .

мическое решение задачи, как правило, предполагает цифровую форму представления измерений.

Авторы глубоко признательны М. Н. Суловьеву за обсуждение результатов и критические замечания.

## Приложение

1. Приведем доказательство теоремы 1. Для этого представим восстанавливаемую по  $m$ -шкале величину в виде  $x_m = x + \psi_m/d_m$ . Поскольку  $0 \leq x < 1 - 1/d_m$ , то при  $\psi_m = \text{const}$  величина  $x_m$  принимает значения из замкнутого промежутка  $[\psi_m/d_m, 1 - 1/d_m + \psi_m/d_m]$ . Концам интервала отвечают целые числа  $\underline{k}'_m = [\psi_m]^+$ ,  $\bar{k}'_m = [d_m - 1 + \psi_m]^+$ . Здесь  $\dot{1} = 1 - \delta/d_m$ ,  $\dot{d}_m = d_m - \delta$  и бесконечно малая положительная величина  $\delta$  обеспечивает включение правого конца в замкнутый промежуток. Очевидно, число элементов множества  $N'_m(\psi_m)$  будет равно

$$Q'_m(\psi_m) = \bar{k}'_m - \underline{k}'_m + 1 = [d_m - 1 + \psi_m]^+ - [\psi_m]^+ + 1.$$

Можно показать, что при  $[d_m]^+ = 0$  и  $-\frac{1}{2} < \psi_m < \frac{1}{2}$

$$Q'_m(\psi_m) = \begin{cases} d_m & \text{при } \psi_m \neq 0; \\ d_m - 1 & \text{при } \psi_m = 0. \end{cases}$$

Выделим множества  $\tilde{N}'_m = N'_m(\tilde{\psi}_m)$  с наибольшим числом элементов  $\tilde{Q}'_m = d_m$ . Точно такое же число элементов имеет множество  $N_m: 0, 1, \dots, d_m - 1$ , образованное при  $\psi_m = 0$  и  $0 \leq x < 1$  ( $\varepsilon = 0$ ). Легко видеть, что если  $0 < \tilde{\psi}_m < \frac{1}{2}$ , то  $\tilde{N}'_m = N_m$ . Если

же  $-\frac{1}{2} < \psi_m < 0$ , то множество  $\tilde{N}'_m$  можно перевести в  $N_m$  сдвигом всех его элементов вправо на 1. Функция  $a_m(k_m)$  — периодическая, с периодом, равным наименьшему общему кратному  $q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(m-1)}$ . Это можно установить, рассматривая систему сравнений [1]. При  $d_m = q_m = \text{НОК}(q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(m-1)})$  алфавиты  $A'_m$  и  $A_m$  совпадают. Отсюда непосредственно следует условие однозначности (5).

2. Покажем инвариантность алфавита  $A_m$  относительно преобразования масштабов (6) (теорема 2). Элемент трансформированного алфавита  $A_m^*$  находим по формуле

$$\begin{aligned} a_m^{*(i)} &= \left\{ \frac{d_i^*}{d_m^*} k_m^* \right\}^+ = \left\{ \left( \frac{d_i^*}{d_m^*} - \left[ \frac{d_i^*}{d_m^*} \right]^+ \right) k_m^* \right\}^+ = \left\{ \left( \frac{d_i t}{d_m} \right)^+ k_m^* \right\}^+ = \\ &= \left\{ \frac{d_i t}{d_m} k_m^* \right\}^+ = \left\{ \frac{d_i}{d_m} \tilde{k}_m \right\}^+; \quad i = 1, \dots, m-1; \quad k_m^* = 0, 1, \dots, q_m - 1, \end{aligned}$$

где  $\tilde{k}_m = t k_m^* \in \tilde{N}_m$ . Нужно показать, что для любых двух чисел  $\tilde{k}_{m_1} \neq \tilde{k}_{m_2} \in \tilde{N}_m$  имеет место  $a_m^*(\tilde{k}_{m_1}) \neq a_m^*(\tilde{k}_{m_2})$ . Если это не так, то в силу периодичности  $a_m^*(k_m)$

$$\tilde{k}_{m_1} \equiv \tilde{k}_{m_2} \pmod{q_m}.$$

Учитывая  $(t, q_m)^+ = 1$ , можно записать

$$k_{m_1}^* \equiv k_{m_2}^* \pmod{q_m}; \quad k_{m_1}^* \neq k_{m_2}^*.$$

Приходим к противоречию, поскольку  $0 < k_m^* < q_m - 1$  и сравнение не выполняется. Таким образом, множество  $A_m^*$  содержит  $q_m$  различных элементов, которые составлены по масштабам  $d_1, d_2, \dots, d_m$ . Отсюда заключаем, что  $A_m^* = A_m$  и преобразование (6) приводит к перенумерации элементов множества  $A_m$ .

3. Доказательство теоремы 3 основано на следующей лемме.

Л е м м а. Для любой пары точек  $\hat{b}_m(k_m) \in \theta_{m-1}$ ,  $a_m(k_m) \in A_m$ , имеющей отображение (7), всегда найдутся при  $d_m = q_m$  пары

$$\begin{aligned} & \hat{b}_m(0), a_m(0); \\ & \dots \dots \dots \\ & \hat{b}_m(k_m - 1), a_m(k_m - 1); \\ & \hat{b}_m(k_m + 1), a_m(k_m + 1); \\ & \dots \dots \dots \\ & \hat{b}_m(q_m - 1), a_m(q_m - 1) \end{aligned}$$

с тем же самым отображением  $z_m$  в  $A_m$ . Действительно, примем

$$z_m^{(i)}(k_m) = \left\{ \hat{b}_m^{(i)}(k_m) - a_m^{(i)}(k_m) + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2}; \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Далее положим

$$\hat{b}_m^{(i)}(k_m) = \left\{ \hat{b}_m^{(i)}(k_l) - a_m^{(i)}(k_l) + a_m^{(i)}(k_m) \right\}^+; \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Тогда

$$z_m^{(i)}(k_m) \equiv \left\{ \hat{b}_m^{(i)}(k_l) - a_m^{(i)}(k_l) + \frac{1}{2} \right\}^+ - \frac{1}{2} = z_m^{(i)}(k_l),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3 проведем от противного. Допустим, что  $R^{(k_m)} \neq R^{(k_l)}$ . Тогда существует точка  $z$ , принадлежащая только множеству  $R^{(k_m)}$  ( $z \notin R^{(k_l)}$ ). Согласно лемме, существуют две пары элементов  $\hat{b}_m(k_m)$ ,  $a_m(k_m)$  и  $\hat{b}_m(k_l)$ ,  $a_m(k_l)$ , отвечающие одному и тому же  $z$ . Свойство выбранной точки  $z$  таково, что первая пара доставляет, а вторая — не доставляет максимум функции  $g(\hat{b}_m, a_m)$ . Но, с другой стороны, функция правдоподобия зависит только от  $z$ , а  $z(k_m) = z(k_l)$ . Возникшее противоречие, рассматриваемое при  $k_l = 0, 1, \dots, q_m - 1$ ,  $k_l \neq k_m$ , доказывает теорему.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Виноградов. Основы теории чисел. М., «Наука», 1965.
2. Л. Н. Логачева. Интерферометры для абсолютных измерений концевых мер длины. М., Стандартгиз, 1961.
3. Р. Фанно. Передача информации. Статистическая теория связи. М., «Мир», 1965.
4. А. Файнштейн. Основы теории информации. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. Ш. Х. Михелович. Теория чисел. М., «Высшая школа», 1962.
6. Г. И. Скрыпник, А. А. Серова, Д. И. Атаев. О надежности устранения многозначности фазовых измерений.— Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 10.

Поступила в редакцию  
15 июля 1971 г.