АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1972

УДК 621.317+519.282

В. П. ШУЛЬЦ
(Новосибирск)

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ СО СТРУКТУРНОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ ПОМЕХ

В работах [1—3] рассматривались алгоритмы преобразования совокупности случайных величин $\{x\}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, основанные на построении для них вариационного ряда

$$\{\eta\}=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \quad \eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \dots \leqslant \eta_n \tag{1}$$

и последующем использовании порядковых статистик — членов вариационного ряда (1), причем в [3] предполагается, что случайные величины могут быть зависимы между собой и иметь различные законы распределения. Установлено, что при $x_i=s+y_i$, $i=1, 2, ..., n$, эти преобразования инвариантны относительно полезного сигнала s и погрешностям преобразования, возникающим из-за воздействия помех $\{y\}=(y_1, y_2, ..., \dots, y_n)$, $y_i=x_i-s$, соответствует вариационный ряд

$$\{\xi\}=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \dots \leqslant \xi_n. \tag{2}$$

Реализация такой обработки сигналов осуществляется многоканальными системами со специальными элементами на выходе, выделяющими соответствующие члены вариационного ряда (1). Построение таких элементов рассмотрено в [4, 5]. Проведенные в [2, 3] исследования показали эффективность использования указанных алгоритмов преобразования для повышения точностных и надежностных характеристик систем особенно в ситуациях, когда характеристики помех и надежностные характеристики элементов не полностью известны.

Рассмотрим случай, когда как сигнал, так и помехи в отдельных каналах являются случайными функциями времени, т. е. $s=s(t)$, $y_i=y_i(t)$, причем спектры сигнала и помех перекрываются. Поскольку при выделении членов вариационного ряда осуществляются нелинейные преобразования составляющих погрешности $\{y(t)\}$, то следует ожидать, что спектр общей погрешности системы будет шире спектра отдельных составляющих погрешности каналов. Если спектр сигнала $s(t)$ ограничен, то применение дополнительной фильтрации выходного процесса системы может привести к повышению точности преобразования сигнала $s(t)$. Рассмотрим это подробно на примере простейшего преобразования — выделения наибольшего члена вариационного ряда (2) для двухканальной системы.

Пусть $x_1(t)=s(t)+y_1(t)$ и $x_2(t)=s(t)+y_2(t)$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — выходные сигналы каналов системы; $s(t)$ — полезный сигнал, представляющий собой узкополосный случайный процесс; $y_1(t)$, $y_2(t)$ — помехи в первом и втором каналах, представляющие собой стационарные и

$$\xi_2(t) = \eta_2(t) - s = \max\,(y_1(t),\, y_2(t)).$$

Определим корреляционную функцию $R(\tau)$ для погрешности $\xi_2(t) - M\xi_2(t)$, где M — знак математического ожидания:

$$R(\tau) = M\{[\xi_2(t+\tau) - M\xi_2(t+\tau)]\ [\xi_2(t) - M\xi_2(t)]\}. \tag{3}$$

Для нахождения $R(\tau)$ погрешность $\xi_2(t)$ удобно представить в виде

$$\xi_2(t) = \frac{1}{2}\,(\beta(t) + \gamma(t)), \tag{4}$$

где

$$\beta(t) = y_1(t) + y_2(t),\ \gamma(t) = |y_1(t) - y_2(t)|.$$

Подставляя (4) в (3) и учитывая, что $My_1(t) = My_2(t) = 0$, получаем

$$R(\tau) = \frac{1}{4}\,M\,\{[\beta(t+\tau) + \gamma_0(t+\tau)]\,[\beta(t) + \gamma_0(t)]\} = \frac{1}{4}\,M\,\{\beta(t+\tau)\,\gamma_0(t)\} +$$

$$+ \frac{1}{4}\,M\,\{\beta(t)\,\gamma_0(t+\tau)\} + \frac{1}{4}\,M\,\{\beta(t+\tau)\,\beta(t)\} + \frac{1}{4}\,M\,\{\gamma_0(t+\tau)\,\gamma_0(t)\}, \tag{5}$$

где $\gamma_0(\theta) = \gamma(\theta) - M\gamma(\theta)$ — центрированный случайный процесс. Покажем, что первое и второе слагаемые в (5) равны нулю. Имеем:

$$\begin{aligned} &M\{\beta(t+\tau)\ \gamma_0(t)\} = M\{\beta(t+\tau)\gamma(t)\} - M\beta(t+\tau)\ M\gamma(t);\\ &M\{\beta(t)\ \gamma_0(t+\tau)\} = M\{\beta(t)\gamma(t+\tau)\} - M\beta(t)\ M\gamma(t+\tau). \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,|y|\,f(x,\,y)\,dxdy,$$

где $f(x,\ y)$ — двумерная совместная плотность вероятности нормально распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} xdx \int_{-\infty}^{\infty} |y|\,f(x,\,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} xdy \left(\int_0^{\infty} yf(x,\,y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} yf(x,\,y)\,dy\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xdx \int_0^{\infty} yf(x,\,y)\,dy - \int_{-\infty}^{\infty} sds \int_0^{\infty} zf(s,z)\,dz = 0. \tag{7}$$

При установлении этого равенства использовалась замена переменных $s = -x$, $z = -y$ и учитывалось, что для заданного закона распределения $f(x,\ y) = f(-x,\ -y)$. Поскольку $M\beta(t) = 0$, то с учетом (7) для (6) получаем

$$M\,\{\beta(t+\tau)\gamma_0(t)\} = M\,\{\beta(t)\gamma_0(t+\tau)\} = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим третье и четвертое слагаемые в (5):

$$\begin{aligned} M\,\{\beta(t+\tau)\ \ \beta(t)\} &= M\,\{[y_1(t+\tau) + y_2(t+\tau)]\,[y_1(t) + y_2(t)]\} =\\ &= R_1(t) + R_{12}(\tau) + R_{21}(\tau) + R_2(\tau), \end{aligned} \tag{9}$$

где $R_1(\tau), R_2(\tau), R_{12}(\tau), R_{21}(\tau)$ — автокорреляционные и взаимные корреляционные функции процессов $y_1(t), y_2(t)$.

$$M\{\gamma_0\ (t+\tau)\gamma_0\ (t)\} = M\{[\,|y_1(t+\tau)-y_2(t+\tau)\,| - M\{|y_1(t+\tau)-y_2(t+\tau)\,|\}]\times$$
$$\times[\,|y_1(t)-y_2(t)\,| - M\{|y_1(t)-y_2(t)\,|\}]\} =$$
$$= M\{|y_1(t+\tau)-y_2(t+\tau)\,|\,|y_1(t)-y_2(t)\,|\} - (M\{|y_1(t)-y_2(t)\,|\})^2. \quad (10)$$

Вычислим $M\{|y_1(t+\tau)-y_2(t+\tau|\,|y_1(t)-y_2(t)\,|\}$. Обозначим случайные величины $y_1(t+\tau)-y_2(t+\tau)$ и $y_1(t)-y_2(t)$ через g и h соответственно, а их коэффициент корреляции — через $\rho(\tau)$. Поскольку случайные величины g и h распределены нормально и их математические ожидания равны нулю, то имеем

$$M\,|gh| = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|xy|\,f(x,\ y)\,dxdy, \qquad (11)$$

где

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{1-2}^2(1-\rho^2(\tau))^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2(\tau))}\left(\frac{x^2}{\sigma_{1-2}^2}-2\rho(\tau)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{xy}{\sigma_{1-2}^2}+\frac{y^2}{\sigma_{1-2}^2}\right)\right\} \text{— двумерная}$$

совместная плотность вероятности; σ_{1-2}^2 — дисперсия случайной величины $y_1(\Theta)-y_2(\Theta)$. Заменой $x = z(1-\rho^2(\tau))^{\frac{1}{2}}\sigma_{1-2}$, $y = t(1-\rho^2(\tau))^{\frac{1}{2}}\cdot$ $\cdot\,\sigma_{1-2}$, $\rho(\tau) = -\rho_1(\tau)$ интеграл (11) приведем к виду

$$M\,|gh| = \frac{1}{2\pi}\,\sigma_{1-2}^2(1-\rho_1^2(\tau))^{\frac{3}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|zt|\exp\left\{-\frac{1}{2}(z^2+2\rho_1(\tau)\,zt+\right.$$
$$\left.+t^2)\right\}dzdt.$$

Этот интеграл вычисляется с помощью интеграла [6]

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(z^2+2\rho_1(\tau)\,zt+t^2)\right\}dzdt$$

и равен

$$M\,|gh| = \frac{2}{\pi}\sigma_{1-2}^2(1-\rho^2(\tau))^{\frac{3}{2}}\operatorname{cosec}^2\varphi\left[1+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\operatorname{ctg}\varphi\right],$$

где $\rho(\tau) = \cos\varphi$, или с учетом последнего равенства

$$M\,|gh| = \frac{2}{\pi}\,\sigma_{1-2}^2\,[(1-\rho^2(\tau))^{\frac{1}{2}}+\rho(\tau)\arcsin\rho(\tau)]. \qquad (12)$$

Входящие в (12) параметры σ_{1-2}^2 и $\rho(\tau)$ выражаются через параметры распределений процессов следующим образом:

$$\sigma_{1-2}^2 = R_1(0)-2R_{12}(0)+R_2(0);$$
$$\rho(\tau) = \frac{R_1(\tau)-R_{12}(\tau)-R_{21}(\tau)+R_2(\tau)}{R_1(0)-2R_{12}(0)+R_2(0)}. \qquad (13)$$

Вторая составляющая выражения (10) равна [7]

$$(M\,\{|y_1(t)-y_2(t)|\})^2 = \frac{2}{\pi}(R_1(0)-2R_{12}(0)+R_2(0)). \qquad (14)$$

Таким образом, с учетом (8), (11) и (14) получаем корреляционную функцию погрешности $\xi_2(t) - M\xi_2(t)$ системы

$$R(\tau) = \frac{1}{4}(R_1(\tau) + R_{12}(\tau) + R_{21}(\tau) + R_2(\tau)) + \frac{1}{2\pi}\sigma_{1-2}^2 \times$$

$$\times [(1-\rho^2(\tau))^{\frac{1}{2}} + \rho(\tau)\arcsin\rho(\tau)] - \frac{1}{2\pi}(R_1(0) - 2R_{12}(0) + R_2(0)), \qquad (15)$$

где σ_{1-2}^2 и $\rho(\tau)$ определены в (13). В соответствии с (15) дисперсия погрешности $\xi_2(t)$ равна

$$\sigma^2 = R(0) = \frac{\pi - 1}{2\pi}(R_1(0) + R_2(0)) + \frac{1}{\pi}R_{12}(0). \qquad (16)$$

Отметим, что при любых значениях $R_{12}(0)$ дисперсия погрешности σ^2 больше нуля. Действительно, для случаев, когда $R_{12}(0) \geqslant 0$, это очевидно. При $R_{12}(0) < 0$ выражение (16) представим в виде

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}[(\pi - 2)(R_1(0) + R_2(0)) + R_1(0) + 2R_{12}(0) + R_2(0)].$$

Используя известное соотношение $|R_{12}(\tau)| \leqslant (R_1(0)\,R_2(0))^{\frac{1}{2}}$, получаем

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}[(\pi - 2)(R_1)(0) + (R_2(0) + R_1^{\frac{1}{2}}(0) - R_2^{\frac{1}{2}}(0))^2 + \varepsilon], \quad \varepsilon \geqslant 0.$$

Следовательно, и в этом случае $\sigma^2 > 0$. Если процессы $y_1(t)$ и $y_2(t)$ некоррелированы и дисперсии их одинаковы, т. е. $R_{12}(\tau) = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_0$, то дисперсия погрешности системы равна

$$\sigma^2 = \sigma_0^2\left(1 - \frac{1}{\pi}\right), \qquad (17)$$

что больше дисперсии погрешности, получаемой при равномерном осреднении помех при тех же условиях, на величину

$$\Delta\sigma^2 = \sigma_0^2\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) - \sigma_0^2\frac{1}{2} = \frac{\sigma_0^2}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Рассмотрим теперь эффективность фильтрации выходного сигнала $\eta_2(t)$ идеальным линейным фильтром с полосой пропускания $\omega_0 - \frac{\Delta}{2} \leqslant \omega \leqslant \omega_0 + \frac{\Delta}{2}$, $\omega_0 \geqslant \Delta$, причем будем считать, что в этой полосе в основном сосредоточен энергетический спектр как полезного сигнала $s(t)$, так и помех $y_1(t)$ и $y_2(t)$. При этом предположении коэффициент корреляции $\rho(\tau)$, входящий в (15), может быть представлен следующим образом [8]:

$$\rho(\tau) = a_c(\tau)\cos\omega_0\tau + a_s(\tau)\sin\omega_0\tau = \rho_0(\tau)\cos[\omega_0\tau - \mu(\tau)],$$

а

$$\frac{1}{4}(R_1(\tau) + R_{12}(\tau) + R_{21}(\tau) + R_2(\tau)) = b_c(\tau)\cos\omega_0\tau + b_s(\tau)\sin\omega_0\tau =$$

$$= b_0(\tau)\cos[\omega_0\tau - \psi(\tau)], \qquad (18)$$

где $a_c(\tau)$, $a_s(\tau)$, $b_c(\tau)$, $b_s(\tau)$ — медленно меняющиеся по сравнению с $\cos\omega_0\tau$ функции τ. Корреляционная функция (15) может быть выражена так:

$$R(\tau) = b_0(\tau)\cos[\omega_0\tau - \psi(\tau)] + \frac{1}{2\pi}\sigma_{1-2}^2\left[\frac{\rho^2(\tau)}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(2n-3)!!]^2}{(2n)!}\rho^{2n}(\tau)\right]. \qquad (19)$$

Используя (18), формулу (19) можно привести (см., например, [8]) к виду

$$R(\tau)=b_0(\tau)\cos[\omega_0\tau-\psi(\tau)]+\sum_{r=1}^{\infty}\rho_{2r}(\tau)\cos[2r(\omega_0\tau-\mu(\tau))], \tag{20}$$

где

$$\rho_{2r}(\tau)=\frac{\sigma_{1-2}^2}{2\pi}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{[(2n-1)!!]^2\binom{2n}{n-r}}{(2n)!\,2^{2n-1}}\rho_0^{2n}(\tau).$$

Корреляционная функция помехи на выходе фильтра определяется выражением

$$R_\Phi(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}C^2(\omega)F(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \tag{21}$$

где

$$F(\omega)=4\int_0^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau d\tau;$$

$$C(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega-\omega_0|\leqslant\frac{\Delta}{2};\\ 0, & |\omega-\omega_0|>\frac{\Delta}{2}.\end{cases}$$

С учетом (20) из (21) получаем

$$R_\Phi(\tau)=\frac{1}{4}(R_1(\tau)+R_{12}(\tau)+R_{21}(\tau)+R_2(\tau)). \tag{22}$$

Дисперсия погрешности после фильтрации равна

$$\sigma_\Phi^2=\frac{1}{4}(R_1(0)+2R_{12}(0)+R_2(0)). \tag{23}$$

Сравнивая (23) с (16), видим, что дисперсия погрешности уменьшилась на величину

$$\Delta\sigma_\Phi^2=\sigma^2-\sigma_\Phi^2=\frac{\pi-2}{4\pi}(R_1(0)-2R_{12}(0)+R_2(0)),$$

причем $\Delta\sigma_\Phi^2\geqslant 0$; равенство имеет место лишь при значении коэффициента корреляции $\rho_{12}(0)=1$ и одинаковых дисперсиях $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_0^2$. Для $\rho_{12}(0)=-1$ и $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_0^2$ дисперсия $\sigma_\Phi^2=0$. Небезынтересно также отметить, что полученное выражение (22) совпадает с выражением для корреляционной функции погрешности, получаемой при равномерном осреднении помех.

Таким образом, рассмотрение этого примера показывает, что использование фильтрации выходных сигналов систем, основанных на использовании порядковых статистик помех, может привести к существенному уменьшению погрешности преобразования сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Розенблат. Функция голосования для непрерывных величин.— Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 4.
2. М. А. Розенблат. Надежность резервированных систем с восстанавливающим органом, выполняющим функцию медианы.— Автоматика и телемеханика, 1970, № 1.

3. П. Н. Градинаров. Точностные и надежностные свойства алгоритмов, построенных на операциях над членами вариационных рядов. Автореферат дис. Л., 1971.
4. М. А. Розенблат. Функция «медианы» в непрерывной логике и ее реализация.— Автоматика и телемеханика, 1969, № 1.
5. Д. А. Браславский. Кворум-элементы для устройств с функциональной избыточностью.— В сб. «Системы с переменной структурой и их применение в задачах автоматического полета». М., «Наука», 1968.

15 февраля 1972 г.