АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1972

УДК 631.291.27

В. М. ЕФИМОВ, З. А. ЛИВШИЦ
(Новосибирск)

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ СЖАТИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ПРЕДСКАЗАТЕЛЬ С ФИКСИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ

1.1. Широкий круг ситуаций, в которых используются автоматизированные системы для сбора и обработки информации, может быть описан следующим образом: производятся измерения случайной функции от n переменных; результаты измерений передаются в запоминающие устройства; на основе полученных данных проводится восстановление сигнала. При этом роль одной из координат может играть время; другими могут быть пространственные или какие-либо иные обобщенные координаты исследуемого объекта. Примерами такого рода являются ввод в ЭВМ с последующей обработкой сведений о распределении яркости на черно-белом кинокадре («двумерный статический случай»); изучение динамики нагрева пространственного тела («четырехмерный динамический случай») и т. п. Ясно, что естественным требованием к разумному построению систем, решающих подобные задачи, является уменьшение объема информации, проходящей по каналам связи и запоминаемой, при обеспечении заданной точности восстановления исходных сигналов. Изучение (при некоторых естественных ограничениях) вопросов, связанных с «улучшением» указанной характеристики, составляет предмет этой работы.

1.2. Пусть измерение значений случайной функции производится в дискретном множестве точек n-мерного пространства; при этом предполагается, что шаг дискретности по каждой из координат постоянен (будем обозначать через Δ_m шаг дискретности по m-й координате); обозначая далее через q шаг квантования по уровню при измерении, будем рассматривать ступенчатое восстановление сигнала, т. е. будем предполагать, что операция восстановления заключается в приписывании всем точкам n-мерного куба со сторонами $\{\Delta_m\}_{m=1}^{n}$ значения цифрового отсчета, взятого в одной из них; при этом рассмотрим случай, когда точка, в которой было произведено измерение, является вершиной куба (для определенности «левой нижней»). Пусть далее имеется возможность использовать предсказатель нулевого порядка с фиксированной апертурой для сжатия данных по любой (но одной!) из координат. Точнее, мы будем говорить, что производится сжатие по k-й координате, если ко всем последовательностям цифровых отчетов, взятых в точках, все координаты которых, кроме k-й, фиксированы, а k-я пробегает дискретное множество значений с шагом Δ_k, применяется следующая процедура: очередной отсчет передается (считается неизбыточным) в том и только в том случае, если он отличен от непосредственно предшествующего.

1.3. Пусть максимально допустимый средний квадрат погрешности воспроизведения равен ε^2, т. е. если $\xi(x_1,\ldots,x_n)$ — «истинное», а $\xi^*(x_1,\ldots,x_n)$ — восстановленное значение функции в точке $x_1,\ldots,x_n$, то требуется выполнение неравенства

$$\sup_{x_1,\ldots,x_n} E[\xi(x_1,\ldots,x_n) - \xi^*(x_1,\ldots,x_n)]^2 \leqslant \varepsilon^2. \tag{1}$$

Задача оптимизации, рассматриваемая в настоящей работе, заключается в выборе совокупности параметров q, $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$, обеспечивающей выполнение неравенства (1) и минимизирующей при этом среднее число переданных отсчетов, взятых на «единичном объеме» пространства.

2.1. Изучим сначала одномерный случай, а затем укажем, как обобщаются полученные для него результаты. Итак, пусть измеряемый сигнал представляет собой случайную функцию одной переменной (например, времени). Тогда функционирование описанной выше системы заключается в следующем: сигнал $X(t)$ квантуется по времени с шагом τ и по уровню с шагом q; отсчеты, попавшие в ту же апертурную зону, что и непосредственно предшествующие, считаются избыточными и не передаются. Пусть задана точность воспроизведения на приемном конце, т. е. средний квадрат ошибки при ступенчатой аппроксимации; требуется выбрать параметры q и τ, минимизирующие среднее число передаваемых в единицу времени отсчетов.

2.2. Пусть $X(t)$ — эргодический случайный процесс. Тогда можно показать, что среднее число отсчетов в единицу времени на выходе предсказателя выражается формулой

$$\lambda(q,\tau) = \frac{1}{\tau}\left[1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{kq-0,5q}^{kq+0,5q}\int dx_0 dx_\tau f(x_0, x_\tau)\right], \tag{2}$$

где $f(x_0, x_\tau)$ — двумерная плотность вероятностей значений процесса, разделенных интервалом времени τ.

Максимальное значение среднего квадрата погрешности воспроизведения определяется соотношением

$$\varepsilon^2 = 2\sigma^2(1-\rho(\tau)) + E[(x_\tau - x_0)\,\xi_0], \tag{3}$$

где $\rho(\tau)$ — коэффициент корреляции между случайными величинами X_0 и X_τ; ξ_0 — ошибка квантования по уровню величины X_0.

Указанная в п. 2.1 задача сводится к минимизации λ при фиксированном значении ε^2; мы будем рассматривать ее в предположении гауссовости сигнала $X(t)$ и совпадения его математического ожидания с серединой одной из апертурных зон.

2.3. Двумерная плотность вероятностей гауссовского случайного процесса с дисперсией σ^2 и корреляционной функцией $\rho(\tau)$ есть

$$f(x_0 x_\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \exp\left[-\frac{x_0^2 - 2x_0 x_\tau \rho(\tau) + x_\tau^2}{2\sigma^2(1-\rho^2(\tau))}\right].$$

Обозначив через Q вычитаемое в квадратных скобках (2), после интегрирования по x_τ получим

$$Q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{kq-0,5q}^{kq+0,5q} \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right]\left[\Phi\left(\frac{kq+0,5q - x_0\rho(\tau)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\tau)}}\right) + \right.$$
$$\left. + \Phi\left(\frac{x_0\rho(\tau) - kq + 0,5q}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\tau)}}\right)\right]; \tag{4}$$

в (4) $\Phi(z)=\int\limits_0^z \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$. Вычислим частную производную

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho(\tau)}=\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \left\{\exp\left[-\frac{(kq+0,5q)^2}{\sigma^2(1+\rho(\tau))}\right]+\exp\left[-\frac{(kq-0,5q)^2}{\sigma^2(1+\rho(\tau))}\right]-\right.$$

$$\left.-2\exp\left[-\frac{q^2}{4\sigma^2(1-\rho(\tau))}\right]\exp\left[-\frac{(kq)^2}{\sigma^2\,(1+\rho(\tau))}\right]\right\}. \qquad (5)$$

Применим к (5) формулу суммирования Пуассона [1]

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho(\tau)}=\frac{\sigma}{q\sqrt{\pi(1-\rho(\tau))}}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \exp\left[-\left(\frac{\pi k\sigma}{q}\right)^2(1+\rho(\tau))\right]-\right.$$

$$\left.-\exp\left[-\frac{q^2}{4\sigma^2(1-\rho(\tau))}\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{\pi k\sigma}{q}\right)^2(1+\rho(\tau))\right]\right\}. \qquad (6)$$

Можно показать, что при малых значениях q/σ

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho(\tau)}\cong\frac{\sigma}{q\sqrt{\pi}\,(1-\rho(\tau))}\left\{1-\exp\left[-\frac{q^2}{4\sigma^2(1-\rho(\tau))}\right]\right\}; \qquad (7)$$

$$Q\cong-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sigma\sqrt{2(1-\rho(\tau))}}{q}\left\{1-\exp\left[-\frac{q^2}{4\sigma^2(1-\rho(\tau))}\right]\right\}+$$

$$+2\Phi\left[\frac{q}{\sigma\sqrt{2(1-\rho(\tau))}}\right]. \qquad (8)$$

При этом ошибка, вносимая при использовании формулы (8), есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с

$$\frac{\sigma}{q}\exp\left[-\left(\frac{\pi\sigma}{q}\right)^2\right].$$

Таким образом, при малых q/σ

$$\lambda(q,\tau)=\frac{1}{\tau}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sigma\sqrt{2(1-\rho(\tau))}}{q}\left[1-\exp\left(-\frac{q^2}{4\sigma^2(1-\rho(\tau))}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+1-2\Phi\left(\frac{q}{\sigma\sqrt{2(1-\rho(\tau))}}\right)\right\}. \qquad (9)$$

2.4. Для гауссовского случайного процесса формула (3) конкретизируется следующим образом:

$$\varepsilon^2=2\sigma^2(1-\rho(\tau))+\frac{q^2}{12}+\frac{q^2}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\exp\left[-2\left(\frac{\pi k\sigma}{q}\right)^2\right]+$$

$$+4\sigma^2(1-\rho(\tau))\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\exp\left[-2\left(\frac{\pi k\sigma}{q}\right)^2\right]. \qquad (10)$$

При высоких требованиях к точности воспроизведения, т. е. при малых q/σ,

$$\varepsilon^2\cong 2\sigma^2(1-\rho(\tau))+q^2/12. \qquad (11)$$

2.5. Можно показать, что если существует пара параметров q^*, τ^*, доставляющая минимум (2) при фиксированном (10), то q_0, τ_0 — решение задачи минимизации (9) при фиксированном значении (11) — близко к оптимальному, причем при $\varepsilon \to 0$ эта «близость» сколь угодно велика. В этом пункте мы сформулируем некоторые достаточные условия для существования оптимальных параметров при малых значениях ε^2. Для этого рассмотрим поведение функции $\varphi(\tau) = \lambda(q(\tau), \tau)$, где $q(\tau)$ определяется (11), в окрестности нуля. Нетрудно показать, что если

$$\left.\frac{d\rho(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} \neq 0, \tag{12а}$$

или

$$\left.\frac{d\rho(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0; \quad \left.\frac{d^3\rho(\tau)}{d\tau^3}\right|_{\tau=0} \neq 0, \tag{12б}$$

или

$$\left.\frac{d\rho(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{d^3\rho(\tau)}{d\tau^3}\right|_{\tau=0} = 0; \quad \left(\left.\frac{d^2\rho(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}\right)^2 \left(\left.\frac{d^4\rho(\tau)}{d\tau^4}\right|_{\tau=0}\right)^{-1} < \frac{\varepsilon^2}{12\sigma^2}, \tag{12в}$$

то функция $\varphi(\tau)$ в окрестности нуля убывает, и, следовательно, существуют оптимальные параметры предсказателя. Из (12а) и (12б), в частности, следует, что оптимум существует, если сигнал $X(t)$ дифференцируем в среднеквадратичном не более, чем один раз.

2.6. Приведем пример. Для стационарного марковского гауссовского процесса с корреляционной функцией

$$\rho(\tau) = \exp[-\alpha|\tau|],$$

согласно (12а), оптимум существует, причем

$$\tau_0 \cong \frac{\varepsilon^2}{4\alpha\sigma^2}; \quad q_0 \cong \varepsilon\sqrt{6}; \quad \lambda_{\text{опт}} \cong \frac{1}{\sqrt{6\pi}\,\tau_0}, \tag{13}$$

т. е. близким к оптимальному является предсказатель, для которого погрешности квантования по уровню и по времени вносят равный вклад, а оптимальный коэффициент сжатия стремится к величине $\sqrt{6\pi}$.

Из последнего замечания следует, что высказанное в [2] утверждение относительно нецелесообразности применения предсказателей нулевого порядка с фиксированной апертурой к стационарным марковским гауссовским случайным процессам при высоких требованиях к точности воспроизведения представляется спорным.

2.7. Отсутствие оптимума выражения (9) при фиксированном значении (11) означает, что $\lambda(q(\tau), \tau)$ монотонно убывает при $\tau \to 0$. Следовательно, для определенного класса сигналов целесообразно использовать предсказатель с фиксированной апертурой при непрерывном считывании на входе, т. е. осуществлять «адаптивное» квантование по времени — передавать отсчеты лишь в моменты пересечения сигналом одного из уровней.

Можно показать, что если на вход предсказателя нулевого порядка с фиксированной апертурой поступает случайный процесс с непрерывно дифференцируемыми реализациями (для этого достаточно потребовать, например, чтобы процесс был дважды дифференцируем в среднеквадратичном), то число отсчетов в единицу времени на его выходе при непрерывном считывании задается формулой

$$\lambda(q) = \frac{E|\dot{X}|}{q} + \frac{1}{q}\sum_{k\neq 0}(-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{x}\,|\dot{x}|\,\theta\left(\frac{2\pi k}{q} \Big/ \dot{x}\right) h(\dot{x}), \tag{14}$$

где $h(\dot{x})$ — плотность вероятностей производной процесса; $E|\dot{x}| =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\dot{x}|\dot{x}|h(\dot{x})$ — первый абсолютный момент производной; $\theta(\omega/\dot{x})$ — характеристическая функция сигнала при фиксированном значении производной. Для гауссовского случайного процесса из формулы (14) следует, что

$$\lambda(q) = \frac{\sigma}{q}\sqrt{-\frac{2}{\pi}\left.\frac{d^2\rho(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}}\,(1+o(1)). \tag{15}$$

Ясно, что при использовании предсказателя с фиксированной апертурой при непрерывном считывании на входе минимум среднего числа отсчетов на выходе достигается при выполнении равенства

$$q^2/12=\varepsilon^2. \tag{16}$$

3.1. Рассмотрим многомерный случай. Будем предполагать, что исследуемая случайная функция гауссовская и стационарная. Тогда рассуждение, аналогичное приведенному для одномерного случая, показывает, что при малых ε^2 справедлива следующая асимптотическая формула для величины λ — среднего числа отсчетов, переданных с единичного объема в предположении, что проводится сжатие по k-й координате*:

$$\lambda \cong \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{z}\left[1-\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right]+2\left(\frac{1}{2}-\Phi(z)\right)}{\prod\limits_{m=1}^{n}\Delta_m}, \tag{17}$$

где

$$z=\frac{q}{\sigma\sqrt{2(1-\rho(\Delta_k))}}.$$

Здесь использована сокращенная запись для нормированной корреляционной функции поля $\rho(x_1,\dots x_k,\dots x_n;\ x_1,\dots x_k+\Delta_k,\dots x_n)=\rho(\Delta_k)$; очевидно, что в силу предположенной стационарности поля левая часть предыдущего равенства не зависит от $x_1, \dots, x_n$; σ — среднеквадратическое значение поля. При «не слишком малых» z (например, при $z\geqslant 2$) можно пользоваться упрощенной приближенной формулой

$$\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{z\prod\limits_{m=1}^{n}\Delta_m}. \tag{17a}$$

По аналогии с одномерным случаем при малых ε^2 и восстановлении случайной функции по отсчету, взятому в вершине куба, «главный член» в выражении для максимума среднего квадрата погрешности восстановления может быть представлен в виде

$$\varepsilon^2=2\sigma^2(1-\rho(\Delta_1,\dots,\Delta_n))+\frac{q^2}{12}, \tag{18}$$

где $\rho(\Delta_1,\dots,\Delta_n)=\rho(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n;\ x_1+\Delta_1,\dots,x_k+\Delta_k,\dots,x_n+\Delta_n)$.

Таким образом, асимптотическое решение сформулированной выше

---

* Формулой (17) не учитываются отсчеты, которыми начинается каждая строка при сжатии по k-й координате и относительное число которых составляет $\dfrac{\Delta_k}{\lambda L_k\prod\limits_{m=1}^{n}\Delta_m}$ (L_k — протяженность пространства по k-й координате).

задачи оптимизации в многомерном случае сводится к минимизации выражения (17) при условии (18).

3.2. В этой работе рассматриваются случайные функции, обладающие эллиптической симметрией, т. е. предполагается, что корреляционная функция имеет вид

$$\rho(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)=\rho\left(\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\Delta_m^2}\right),$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — постоянные.

Ясно, что при высоких требованиях к точности воспроизведения малыми будут шаги дискретности по каждой из координат. Из (18) следует, что оптимальные значения параметров в большой степени зависят от поведения корреляционной функции поля в окрестностях нуля; конкретный же вид корреляционной функции не слишком важен. Будут рассмотрены следующие случаи:

$$\rho\left(\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\Delta_m^2}\right)=1-\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\Delta_m^2}+o\left(\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\Delta_m^2}\right), \qquad (19)$$

что соответствует функциям с «негладкими» реализациями;

$$\rho\left(\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\Delta_m^2}\right)=1-\frac{1}{2!}\left(\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\Delta_m^2}\right)^2+O\left[\left(\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\Delta_m^2}\right)^4\right], \qquad (20)$$

т. е. дважды дифференцируемые в среднеквадратичном сигналы.

Запись корреляционной функции в виде (19) и (20) предполагает также, что главные оси эллипса направлены вдоль координатных осей.

3.3. Сначала изучим случай, когда корреляционная функция в окрестности нуля имеет вид (19). Близкое к оптимальному решение задачи задается соотношениями:

$$\alpha_k\Delta_k=\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}\,\frac{\sqrt{2n-1}}{4n};\quad \underset{m\neq k}{\alpha_m\Delta_m}=\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}\,\frac{\sqrt{2(2n-1)}}{4n};\quad \frac{q^2}{12}=\frac{\varepsilon^2}{2n}; \qquad (21)$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\,\frac{(4n)^n(2n-1)^{\frac{1}{4}}}{(2(2n-1))^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)^n\prod_{m=1}^{n}\alpha_m;\qquad k=\frac{\sqrt{6\pi}}{(2n-1)^{\frac{1}{4}}}. \qquad (22)$$

Здесь (21) определяет параметры системы сжатия, а (22) — ее характеристики (k — коэффициент сжатия). Формулы (21) и (22) получены с использованием соотношения (17а), и применение их для больших $n (n>4)$ может привести к неверным результатам. Из (21) и (22) вытекает, что: существует n различных эквивалентных режимов работы системы сжатия, так как зависимость величины λ от постоянных α_m симметрична, и, следовательно, можно производить сжатие по любой из координат, выбирая соответствующим образом параметры системы сжатия; доля максимума среднего квадрата ошибки восстановления, затрачиваемая на операцию квантования по уровню одинакова для всех n режимов; безразмерный шаг решетки $\alpha_k\Delta_k$ по сжимаемой координате в $\sqrt{2}$ раза меньше соответствующего шага по любой другой координате решетки.

Рассмотрим далее случай, когда координаты пространства физически однородны и используется решетка с одинаковым шагом $\Delta_k=\Delta_m=\Delta$

по всем координатам. Тогда близкими к оптимальным будут следующие параметры системы:

$$\Delta\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2}=\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}\,\frac{2n-1}{4n};\qquad \frac{q^2}{12}=\frac{\varepsilon^2}{2n}. \tag{23}$$

При этом характеристики системы:

$$\lambda=\frac{(4n)^n(2n-1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6\pi}\,(2n-1)^n}\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)^n\sqrt{\alpha_k}\left(\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\right)^{\frac{2n-1}{4}};$$

$$k=\frac{\sqrt{6\pi}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{n}\alpha_m^2\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\alpha_k}}. \tag{24}$$

Из этих соотношений следует, что характеристики системы сжатия в данном случае зависят от того, по какой координате пространства производится сжатие. Из формулы для величины λ вытекает, что целесообразно осуществлять сжатие по наиболее «коррелированной» координате, т. е. по той, для которой постоянная α_k минимальна (по самой длинной оси эллипсоида).

Использование решетки с одинаковым шагом по всем координатам ухудшает основную характеристику системы λ; причем, как следует из (22) и (24), это ухудшение может быть сколь угодно большим. Однако, когда постоянные α_m по координатным осям одинаковы $(\alpha_k=\alpha_m=\alpha)$, равношаговая решетка практически эквивалентна решетке, задаваемой соотношением (21). Так, при $n=2$, 3 увеличение λ составляет 4 и 6% соответственно.

Рассмотрим далее случай, когда при значениях, близких к единице, корреляционная функция представлена формулой (20). При этом будем предполагать, что условия (12) не выполняются. Тогда при высокой точности восстановления

$$\alpha_k\Delta_k=0;\quad \underset{m\neq k}{\alpha_m\Delta_m}=\left(\frac{\varepsilon^2}{n\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}};\qquad \frac{q^2}{12}=\frac{\varepsilon^2}{n}; \tag{25}$$

$$\lambda=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{6\pi}}\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{m=1}^{n}\alpha_m. \tag{26}$$

Оптимальный режим работы системы сжатия предусматривает непрерывное считывание по сжимаемой координате и одинаковые безразмерные шаги решетки по остальным координатам. В силу симметричной зависимости величины λ от постоянных α_m возможна организация n различных эквивалентных режимов работы системы. Доля погрешности, затрачиваемая на операцию квантования по уровню, не зависит от выбранного режима.

Если координаты пространства физически однородны и используется решетка с одинаковыми шагами по всем координатам $(\Delta_k=\Delta_m=\Delta)$, то в точке оптимума

$$\Delta\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2}=\left(\frac{n-1}{n}\,\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}};\quad \frac{q^2}{12}=\frac{\varepsilon^2}{n}; \tag{27}$$

$$\lambda=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{6\pi}\,(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}}\alpha_k\left(\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\right)^{\frac{n-1}{2}};$$

$$k=\frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2}}{\alpha_k}. \tag{28}$$

В этом случае сжатие необходимо проводить по координате с наименьшей постоянной α_k. Переход от решетки с параметрами (25) к решетке с одинаковыми шагами по координатным осям приводит к увеличению характеристики λ в

$$\frac{\alpha_k\left(\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{m=1}^{n}\alpha_m}\ \text{раз.}$$

3.5. Рассмотрим в качестве примера определение режима работы и параметров системы сжатия данных при вводе в ЭЦВМ фильмовой информации.

Пусть корреляционная функция изображения на кадре представима в виде (19). Тогда, как следует из (21), возможны два способа построения решетки, в узлах которой необходимо производить цифровые измерения плотности негатива: при сканировании вдоль оси x измерения должны производиться с шагом $\Delta_x=\frac{\sqrt{3}}{8}\frac{\varepsilon}{\alpha_x\sigma^2}$; при этом между горизонтальными строками необходимо выдерживать расстояние $\Delta_y=\frac{\sqrt{6}}{8}\frac{\varepsilon^2}{\alpha_y\sigma^2}$; при сканировании вдоль оси y шаг между измерениями оказывается равным $\Delta_y=\frac{\sqrt{3}}{8}\frac{\varepsilon^2}{\alpha_y\sigma^2}$, а расстояние между вертикальными строками $\Delta_x=\frac{\sqrt{6}}{8}\frac{\varepsilon^2}{\alpha_x\sigma^2}$. Оба эти режима будут давать одну и ту же среднюю загрузку памяти машины λL_xL_y; при этом в память машины попадет в среднем третья часть результатов измерений. Если шаги решетки выбраны одинаковыми ($\Delta_x=\Delta y=\Delta$), то, как следует из (24), более выгодным оказывается сканирование вдоль оси с меньшей постоянной α. Увеличение средней загрузки памяти машины при использовании равношаговой решетки зависит от соотношения между величинами α_x и α_y и составляет, как следует из (22) и (24), $\sim 0{,}63(1+\beta)^{\frac{3}{4}}/\sqrt{\beta}$, где $\beta\leqslant 1$ — отношение меньшей постоянной α к большей. При $\beta=1$ увеличение загрузки минимально ($\sim 1{,}04$). С уменьшением β использование равношаговой решетки становится все более невыгодным. Интересно отметить, что с уменьшением β коэффициент сжатия для равношаговой решетки возрастает, в то время как для решетки с параметрами (21) коэффициент сжатия не зависит от β.

Пусть теперь корреляционная функция изображения удовлетворяет условию (20). Тогда из (26) вытекают два способа сканирования кадра: непрерывное считывание кодированной по амплитуде плотности кадра вдоль оси x с расстоянием между горизонтальными строками $\Delta_y=\frac{1}{\alpha_y}\left(\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ и аналогичное сканирование вдоль оси y с расстоянием между вертикальными строками $\Delta_x=\frac{1}{\alpha_x}\left(\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Технически эти способы требуют непрерывного по строке аналого-цифрового преобразования амплитуды плотности негатива. Использование равношаговой решетки с параметрами (27) увеличивает среднюю загрузку памяти машины по сравнению с непрерывным считыванием в $(1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ раз. Максимальное увеличение загрузки не превышает $\sqrt{2}$ (при $\alpha_x=\alpha_y$), что, по-видимому, оправдывает применение равношаговой решетки, более просто технически осуществимой, чем непрерывное считывание.

4.1. Для того чтобы оценить эффективность асимптотически оптимальных методов сжатия, полезно сравнить рассмотренную систему с такой, для которой достигается минимум выражения

$$\lambda = \frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{n} \Delta_m} \tag{29}$$

при условии (18), т. е. с системой, в которой не используется сжатие данных, а параметры выбраны так, чтобы минимизировать число отсчетов на единицу объема.

Легко видеть, что для случая, когда корреляционная функция имеет вид (19), асимптотически оптимальные параметры этой системы определяются соотношениями:

$$q=0; \quad \alpha_m\Delta_m = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{n}\,2\sigma^2}; \quad \lambda = 2^n n^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)^n \prod_{m=1}^{n} \alpha_m, \tag{30}$$

для корреляционной функции вида (20)

$$q=0; \quad \alpha_m\Delta_m = \left(\frac{\varepsilon^2}{n2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \lambda = n^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{m=1}^{n} \alpha_m. \tag{31}$$

Сравнивая, например, (31) с (26), видим, что относительный асимптотический «выигрыш» в этом случае составляет $\sqrt{6\pi}$ и не зависит от размерности пространства. Для недифференцируемых процессов выигрыш меньше; так, для $n=1$ он примерно равен $\sim \sqrt{3\pi/2}$.

5.1. Выше была рассмотрена задача оптимизации параметров предсказателя в предположении, что «информация» о сигнале представляется в терминах количества отсчетов с единицы объема на выходе предсказателя; более естественным является измерение этой «информации» в количестве двоичных единиц, передаваемых с единицы объема. Значение последней характеристики зависит не только от числа отсчетов, но и от разрядности кодового слова, используемого для записи амплитуды сигнала в точке взятия отсчета и его датирования (датирование необходимо, так как при применении сжимающих устройств интервалы по сжимаемой координате между отсчетами случайны). Для такого рассмотрения необходима конкретизация способа кодирования промежутков между отсчетами. Мы не будем останавливаться подробно на этих вопросах; заметим только, что приведенные выше результаты дают хорошее приближение к оптимальному и в этом более общем случае. Это объясняется тем, что, грубо говоря, среднее число передаваемых отсчетов более «чувствительно» к изменению параметров, чем длина кодового слова.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Бохнер. Лекции об интегралах Фурье. М., Физматгиз, 1962.
2. Э. С. Каташков, А. П. Пахомов, Ю. Л. Розов, М. Б. Улицкий. Применение комбинированных методов сжатия информации в задачах цифровой регистрации.— Автоматика и вычислительная техника, 1971, № 3.

*Поступила в редакцию
18 февраля 1972 г.*