А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1972

УДК 681.327.2+519.152

Ю. Н. ЗОЛОТУХИН, Ю. М. КРЕНДЕЛЬ
(Новосибирск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК БУФЕРНОГО ЗАПОМИНАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

Современные системы сбора и обработки информации — это сложные, разветвленные системы, состоящие обычно из большого числа функциональных преобразователей, каналов связи, устройств обработки и т. п. Широкое применение в этих системах находят буферные запоминающие устройства (БЗУ), служащие для предварительного накопления информации. Последнее может быть необходимо, например, для согласования характеристик потока информации в местах стыковки подсистем между собой или с каналами связи; для сборки, сокращения, добавления или разложения информации и т. п.

Исследованию буферных запоминающих устройств как звена системы сбора и обработки информации посвящен ряд работ, например [1—3], где с помощью методов теории массового обслуживания находятся характеристики БЗУ. В случае, когда при обмене информацией возникает потребность в предварительной сборке данных, при исследовании характеристик БЗУ методами теории массового обслуживания естественно использовать модели группового обслуживания и теории хранилищ [4, 5].

Данная статья посвящена исследованию БЗУ, служащего для предварительной сборки сообщений, поступающих от источника информации. Предполагается, что в моменты обращения к буферу считывание сообщений производится только при наличии в эти моменты в буфере не менее определенного числа сообщений; при этом сообщения считываются из буфера группами.

Для исследования БЗУ воспользуемся моделью группового обслуживания. В рассматриваемой ниже модели термин «сообщение» будет заменен термином «заявка». Кроме того, в модели предполагается буферное устройство неограниченной емкости, что целесообразно при наличии в системе БЗУ достаточно большой емкости или при достаточно малом уровне потерь сообщений.

Приведем описание математической модели.

Пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ поступает в однолинейную систему с ожиданием. В случайные моменты времени t_1, t_2, ..., t_n, ... обслуживающее устройство производит мгновенное извлечение из очереди (считывание из буфера) l заявок

$$l = \begin{cases} 0, & \text{если } j < k; \\ j, & \text{если } k \leqslant j < m; \\ m, & \text{если } j \geqslant m, \end{cases}$$

где j — число заявок в буфере непосредственно перед обращением к нему обслуживающего устройства; k и m $(0<k\leqslant m)$ — целые числа.

Случайные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ образуют рекуррентный поток событий с произвольной функцией распределения $B(t)$ величин $t_n - t_{n-1}$ $(n\geqslant 1,\ t_0=0)$; предполагается, что $\int\limits_0^\infty (1-B(t))\,dt<\infty$.

В работе определяются: стационарное распределение $\{p_n\}$, где p_n — вероятность наличия в буфере непосредственно перед моментами обращения к нему ровно n заявок, и для случая $k=m=1$ при ограниченной емкости буфера доля потерянных заявок.

Будем понимать под состоянием системы в некоторый момент времени количество заявок в буфере в этот момент времени. Пусть $X(t_n)$ — состояние системы в момент времени t_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Здесь и далее $X(t_n)=X(t_n-0)$.

Нетрудно показать, что процесс $X(t_n)$ представляет собой цепь Маркова. Обозначим через $p_n(i)$ вероятность того, что $X(t_n)=i$. Уравнения Чэпмена — Колмогорова для рассматриваемой марковской цепи имеют вид:

$$p_{n+1}(j)=\sum_i p_n(i)\,\pi_{ij}, \tag{1}$$

где π_{ij} $(i,\ j=0,\ 1, \ldots)$ — элементы матрицы переходных вероятностей $\|\pi_{ij}\|$. Значения π_{ij} определяются из соотношений:

$$\pi_{ij}=\begin{cases}\left.\begin{array}{r} q(j-i), \text{ если } j-i\geqslant 0, \\ 0, \text{ если } j-i<0, \end{array}\right\} i<k; \\ q(j), \text{ если } k\leqslant i\leqslant m; \\ \left.\begin{array}{r} q(j-i+m), \text{ если } j-i+m\geqslant 0, \\ 0, \text{ если } j-i+m<0, \end{array}\right\} i>m. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $q(x)$ — вероятность поступления x заявок за произвольно выбранный промежуток времени между двумя смежными моментами обращения к буферу:

$$q(x)=\frac{1}{x!}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda t)^x\,dB(t); \quad x=0,1,\ldots .$$

Из (2) видно, что рассматриваемая марковская цепь $X(t_n)$ $(n=0,\ 1, \ldots)$ является однородной, неприводимой и непериодической.

Для выяснения достаточных условий эргодичности цепи $X(t_n)$ нами будет использоваться следующая теорема [6]:

для того чтобы неприводимая непериодическая марковская цепь имела стационарное распределение, достаточно существования $\varepsilon>0$, натурального числа i_0 и набора неотрицательных чисел $y_0, y_1, \ldots$ таких, что

$$\sum_{j\geqslant 0}\pi_{ij}y_j\leqslant y_i-\varepsilon \quad \text{для } i>i_0;$$

$$\sum_{j\geqslant 0}\pi_{ij}y_j<+\infty \quad \text{для } i\leqslant i_0.$$

Определим загрузку ρ рассматриваемой системы как

$$\rho\equiv\frac{\sum\limits_{x\geqslant 0} xq(x)}{m}.$$

Пусть $\varepsilon=1$, $i_0=m-1$. Покажем, что цепь Маркова $X(t_n)$ является эргодической, если $\rho<1$.

Введем обозначение $y_j = \frac{j}{m-\rho m}$; тогда для $i\geqslant m$

$$\sum_{j=i-m}^{\infty} \frac{j}{m-\rho m} q(j-i+m) \leqslant \frac{i}{m-\rho m} - 1$$

или

$$\sum_{x=0}^{\infty} xq(x) \leqslant \rho m$$

и

$$\rho = \frac{\sum_{x=0}^{\infty} xq(x)}{m} < 1.$$

Для $i\leqslant m-1$ рассмотрим два случая:

1. $i<k$.

$$\frac{\sum_{j\geqslant i} jq(j-i)}{m-\rho m} = \frac{\sum_{x=0}^{\infty} (x+1)\, q(x)}{m-\rho m} = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{i}{m-\rho m} < +\infty.$$

2. $k\leqslant i\leqslant m-1$.

$$\frac{\sum_{j=0}^{\infty} jq(j)}{m-\rho m} = \frac{\rho}{1-\rho} < +\infty.$$

Следовательно, при выполнении условия $\rho<1$ существуют предельные вероятности

$$p(j) = \lim_{n\to\infty} p_n(j);\ j=0,1,\dots .$$

Уравнения (1) для стационарного режима запишем в виде

$$p(j) = \sum_i p(i)\, \pi_{ij};\ i,j=0,1,2,\dots . \qquad (3)$$

Для вычисления стационарного распределения вероятностей состояний системы воспользуемся методом производящих функций. Обозначим:

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p(j) Z^j; \quad Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q(j) z^j.$$

Умножив обе части (3) на z^j и просуммировав, получим

$$P(z) = Q(z) \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} p(j) z^j + \sum_{j=k}^{m} p(j) + \sum_{j=m+1}^{\infty} p(j) z^{j-m} \right\}.$$

После ряда преобразований приходим к следующему выражению:

$$P(z) = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} p(j)(z^{j+m} - z^j) + \sum_{j=k}^{m-1} p(j)(z^m - z^j)}{\frac{z^m}{Q(z)} - 1} . \qquad (4)$$

Связь между $Q(z)$ и преобразованием Лапласа — Стильтьеса функции распределения интервалов между соседними моментами обращения к буферу выражается в виде $Q(z)=\beta[\lambda(1-z)]$.

Неизвестные вероятности $p(0)$, $p(1)$, ..., $p(m-1)$ в правой части выражения (4) могут быть определены методом, изложенным [4].

Рассмотрим теперь частный случай, когда $k=m=1$. Производящая функция $P(z)$ при этом имеет вид

$$P(z) = \frac{p(0)(z-1)}{z-Q(z)} Q(z). \tag{5}$$

Значение $p(0)$ в (5) определяется из условия $P(1)=1$. Для рассматриваемого случая отметим связь между производящими функциями вероятностей состояний для конечной ($L<\infty$) и бесконечной ($L=\infty$) емкостей буфера. Введем производящую функцию $P^*(z)$ вероятностей состояний для буфера конечной емкости L

$$P^*(z) = \sum_{n=0}^{L} p^*(n) z^n.$$

Следуя Климову [6], можно записать соотношение, связывающее $P^*(z)$ с выражением (5) для $P(z)$:

$$P^*(z) = \frac{p^*(0)}{p(0)} p(z)\Big|_L$$

или

$$P^*(z) = \frac{p^*(0)(z-1)}{z-Q(z)} Q(z)\Big|_L. \tag{6}$$

Здесь $F(z)|_N = a_0 + a_1 z^1 + \ldots + a_N z^N$, если $F(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$. Константа $p^*(0)$ в (6) определяется из условия нормировки $P^*(1)=1$.

Заметим, что в [1] была составлена система уравнений для определения вероятностей состояния буфера конечной емкости при постоянном времени между считываниями, которая, однако, не была решена в общем виде. Полученное же соотношение (6) позволяет непосредственно определить вероятности состояний системы даже при более общих предположениях относительно процедуры считывания.

Будем понимать под долей потерянных заявок $P_п$ отношение среднего числа потерянных заявок к среднему числу поступивших. Нетрудно показать, что для определения $P_п$ можно воспользоваться соотношением, приведенным в [1, 7]:

$$P_п = 1 - \frac{P_{сч}}{\rho}, \tag{7}$$

где $P_{сч} = \sum_{n=1}^{L} p^*(n)$ — вероятность иметь в буфере хотя бы одну заявку в момент обращения к нему (вероятность считывания).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Medlin. Buffer lenght requarement for a telemetry data compressor.— Proceed. of National Telemetry Conference. Washington, 1962.
2. G. R. Schwarz. Adaptive Buffer Design for Data Compression Systema.— «WESCON Techn. Papers», 1967, № 3, 6/3.
3. D. G. Maritsas and M. G. Hartley. Buffer length for Erlang Input and Constant Removal Rate.—IEEE Trans. on Computers, 1970, v. C-19, № 9.
4. Т. Л. Саати. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М., «Советское радио», 1965.
5. Н. Прабху. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. М., «Машиностроение», 1969.
6. Г. П. Климов. Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966.
7. Дж. Риордан. Вероятностные системы обслуживания. М., «Связь», 1966.

Поступила в редакцию
13 декабря 1971 г.