А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1972

УДК 519.2

О. Е. ТРОФИМОВ
(Новосибирск)

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОТЕРИ ЗАЯВКИ В ОДНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим следующую систему. На вход прибора поступает рекуррентный поток, время обслуживания произвольное, очереди нет. Необходимо определить вероятность потери заявки.

Положим сначала время обслуживания τ постоянным. Пусть p_k — вероятность потери k заявок за время обслуживания τ; тогда среднее число заявок, потерянных за время τ, равно

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} q_k, \tag{1}$$

где $q_k = 1 - \sum_{j=0}^{k} p_j$; q_k — вероятность того, что за время обслуживания будет потеряно больше k заявок.

В исследуемой системе обслуживание начинается в момент поступления заявки, поток рекуррентный, следовательно, $q_k = A^{*(k+1)}(\tau)$, где $A^{*(k+1)}(\tau)$ — функция распределения суммы $(k+1)$ независимых случайных величин, каждая из которых имеет функцию распределения $A(\tau)$. Положим $B_{k+1}(\tau) = A^{*(k+1)}(\tau)$, $B_1(\tau) = A(\tau)$, $H(\tau)$ — среднее число заявок, теряемых за время обслуживания. Получаем

$$H(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(\tau). \tag{2}$$

Вероятность потери заявки определим как отношение среднего числа потерянных к среднему числу пришедших в момент окончания обслуживания. Если обслужено n заявок, то в среднем потеряно nH. H — среднее число заявок, теряемых при обслуживании одной заявки, а всего в среднем поступило $nH+n$ заявок. Отсюда

$$p = \frac{nH}{n(H+1)} = \frac{H}{H+1}. \tag{3}$$

Если время обслуживания непостоянно, то $H(\tau)$ следует осреднить по $f(\tau)$ — плотности вероятности времени обслуживания:

$$p = \frac{H_1}{1+H_1}; \quad H_1 = \int_0^{\infty} f(\tau) \quad H(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Покажем, как некоторые известные результаты для систем с одним прибором следуют из (4).

Рассмотрим систему: один прибор, пуассоновский поток на входе, произвольное время обслуживания. Из формул Эрланга — Хинчина — Севастьянова при $n=1$ получим:

$p=\frac{\lambda s}{1+\lambda s}$ (s — среднее время обслуживания; λ — параметр потока) или

$p=\frac{s}{1+s}$ (λ без ущерба общности можно положить равным 1).

Функция распределения суммы n независимых, показательно распределенных величин равна:

$$G_n(\tau)=1-e^{-\tau}\left(1+\frac{\tau}{1!}+\ldots+\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\right);$$

$$g_n(\tau)=G_n'(\tau)=\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\tau}; \tag{5}$$

$$H'(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n'=e^{-\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}=1.$$

Следовательно, $H(\tau)=\tau$. Таким образом,

$$H_1=\int_0^{\infty}H(\tau)f(\tau)\,d\tau=\int_0^{\infty}\tau f(\tau)\,d\tau=s$$

(s — среднее время обслуживания) и

$$p=\frac{H_1}{1+H_1}=\frac{s}{1+s}, \tag{6}$$

т. е. для пуассоновского потока событий и произвольного времени обслуживания формулы совпадают.

Рассмотрим преобразование Лапласа случайной величины с функцией распределения $A(\tau)$

$$\varphi(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda\tau}A'(\tau)\,d\tau=L(A(\tau)). \tag{7}$$

Таким образом,

$$L(B_{k+1}(\tau))=\varphi^{k+1}(\lambda);$$

$$\psi(\lambda)=L(H(\tau))=\int_0^{\infty}e^{-\lambda\tau}H'(\tau)\,d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^k(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{1-\varphi(\lambda)}, \tag{8}$$

так как $\varphi(\lambda)<1$, за исключением $\lambda=0$.

Рассмотрим опять пуассоновский поток на входе и произвольное время обслуживания. Получим выражение (6) с помощью преобразования Лапласа. В этом случае $\varphi(\lambda)=1/(1+\lambda)$ (параметр потока равен 1).

$$\psi(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{1-\varphi(\lambda)};\qquad \int_0^{\infty}e^{-\lambda t}H'(t)\,dt=\frac{1}{\lambda}. \tag{9}$$

Преобразование Лапласа от 1 есть $1/\lambda$. Следовательно, $H'(t)=1$ и $H(t)=t$.

Рассмотрим произвольный рекуррентный поток на входе и экспоненциальное время обслуживания с параметром μ. В этом случае для $n=1$ из формул Такача [1] получаем

$$p=\int_0^\infty e^{-\mu x} A'(x)\,dx=\varphi(\mu). \tag{10}$$

Поскольку $f(\tau)=\mu e^{-\mu\tau}$ — плотность вероятности времени обслуживания, то

$$H_1\ \mu=\int_0^\infty e^{-\mu t} H(t)\,dt=\frac{\varphi(\mu)}{1-\varphi(\mu)}. \tag{11}$$

Здесь использовано то, что $L(H)=\frac{1}{\mu}L(H')$ и что $H(t)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)$ и

$$\int_0^\infty e^{-\mu\tau} B_k(\tau)\,d\tau=\varphi^k(\mu).$$

Таким образом,

$$p=\frac{H_1}{1+H_1}=\varphi(\mu). \tag{12}$$

В общем случае в точках непрерывности $H(\tau)$ можно искать по формуле [2]

$$H(\tau)=\lim_{a\to\infty}\sum_{n\leqslant a\tau}\frac{(-a)^n}{n!}\psi^{(n)}(a);\qquad \psi(a)=\frac{\varphi(a)}{1-\varphi(a)}, \tag{13}$$

где $\varphi(a)$ — преобразование Лапласа плотности распределения времени между заявками. $H(\tau)$ можно находить также из уравнения [2]

$$H(\tau)=A(\tau)+\int_0^\tau H(\tau-u)A'(u)\,du. \tag{14}$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$H(\tau)=\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))}e^{\lambda\tau}d\lambda;\quad k>0. \tag{15}$$

Здесь $\varphi(\lambda)$ — по-прежнему преобразование Лапласа от $A'(t)$; $\psi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}A'(t)\,dt$, но функция должна рассматриваться в комплексной области. Если $\varphi(\lambda)$ — дробно-рациональная функция, то интеграл в (15) можно вычислять с помощью теории вычетов. Например, для пуассоновского потока (и вообще для произвольной γ-плотности) можно было бы дать 3-й вывод формулы. (Преобразование Лапласа для γ-плотности с индексом α есть $1/(1+\lambda)\alpha$.)

Вернемся к постоянному времени обслуживания

$$H(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(\tau). \tag{16}$$

Следует заметить, что если вероятность потери заявки мала, то можно ограничиваться первыми членами. Действительно, $B_k(\tau)\leqslant B^k(\tau)$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{r}B_k(\tau)\leqslant H(\tau)\leqslant\sum_{k=1}^{r}B_k(\tau)+\frac{B_1^{r+1}(\tau)}{1-B_1(\tau)}. \tag{17}$$

Например, если $B_1(\tau)=0{,}1$, то $0{,}1\leqslant H(\tau)\leqslant 0{,}11$.

$$B_1(\tau)\leqslant H(\tau)<B_1(\tau)+\frac{B_1^2(\tau)}{1-B_1(\tau)}. \quad (18)$$

Замечания об экстремальных режимах. Пусть время обслуживания постоянно, среднее время между заявками равно a. Какой поток самый хороший (минимальная вероятность потери)? Если $a>t$, то регулярный. При нем вероятность потери равна нулю. Если $a<t$, то для регулярного потока $H(t)=t/a$,

$$P=1-\frac{a}{a+t}=\frac{H(t)}{1+H(t)} \text{ (полагаем } t \text{ кратным } a). \quad (19)$$

Рассмотрим другой поток с функцией распределения; $p(\xi=0)=1-a/t$; $p(\xi=t)=a/t$. Заявки приходят в регулярные моменты, идущие через t, но для сохранения среднего в каждый «вызывающий момент» может приходить пачка заявок. Поток не ординарный, но к нему можно приближаться с помощью ординарных сколь угодно близко.

Вероятность того, что в пачке будет больше k заявок, равна $(1-a/t)^{k+1}$; следовательно, $H(t)=(t-a)/a$;

$$p=\frac{H(t)}{1+H(t)}=1-\frac{a}{t}. \quad (20)$$

Вероятность потери заявки меньше, чем для регулярного потока. (Есть предположение, что этот поток доставляет минимум потерь).

Дадим оценку для минимальной вероятности потерь при постоянном времени обслуживания t и средней интенсивности потока $a(a<t)$. Если ξ — неотрицательная величина, то $p(\xi\leqslant t)\geqslant 1-\mu\xi/t$. Следовательно, (полагаем t/a целым)

$$H(t)\geqslant\sum_{k=1}^{t/a}\left[1-\frac{ka}{t}\right]. \quad (21)$$

Отсюда получаем, что

$$p=\frac{H(t)}{1+H(t)}\geqslant 1-\frac{2a}{t+a}. \quad (22)$$

Если время обслуживания экспоненциальное, то наименьшей вероятность потери заявки будет при регулярном потоке. Действительно,

$$p=\int_0^\infty e^{-\mu x}f(x)\,dx.$$

Если поток регулярный, то $p=e^{-\mu a}$, где a — расстояние между заявками.

Покажем, что $\int_0^\infty e^{-\mu x}f(x)\,dx\geqslant e^{-\mu a}$, где $a=\int_0^\infty xf(x)\,dx$. Действительно,

$$\psi(\mu)=\frac{\varphi(\mu)}{\varphi_0(\mu)}=\frac{\int_0^\infty e^{-\mu x}f(x)\,dx}{e^{-\mu a}}=\int_0^\infty e^{-\mu(x-a)}f(x)\,dx; \quad (23)$$

$$\psi'(\mu)=\int_0^\infty (a-x)\left[e^{-\mu(x-a)}-1\right]f(x)\,dx.$$

В последнем равенстве использовано то, что $\int_0^\infty(a-x)f(x)dx=0$. Из (23) получаем, что $\varphi'(\mu) \geqslant 0$; действительно, если $x<a$, то оба сомножителя положительны; если $x>a$, то оба сомножителя отрицательны.

Итак, $\psi(0)=1$ и $\psi_1(\mu) \geqslant 0$ для всех μ; следовательно, $\psi(\mu) \geqslant 1$ и $\varphi(\mu) > \varphi_1(\mu)$ — минимальная вероятность потери при регулярном потоке.

Рассмотрим поток заявок, обслуженных прибором. Если на вход прибора поступает рекуррентный поток и нет очереди, то выходящий поток будет рекуррентным потоком с запаздыванием:

$$\nu_1 = \xi_1 + \eta_1; \quad \nu_2 = \eta_1 - \eta_2 + \xi_2 + \sum_{i=3}^{\infty} \xi_i \mathrm{sg}\left(\eta_1 - \sum_{j=2}^{i-1} \xi_j\right),$$

где ν_i — время между $(i-1)$-й и i-й заявками выходящего потока; η_i — время обслуживания i-й заявки выходящего потока; ξ_i — время между $(i-1)$-й и i-й заявками входящего потока. Как уже отмечалось, выходящий поток является рекуррентным с запаздыванием, т. е. все ν_i при $i \geqslant 2$ распределены одинаково.

Определим среднее время между заявками выходящего потока (a — среднее время между заявками входящего потока, τ — среднее время обслуживания): $\mu\nu_1 = a+\tau$,

$$\mu\nu_2 = \mu\xi_2 + \mu\left(\sum_{i=3}^{\infty} \xi_i \,\mathrm{sg}\left(\eta_1 - \sum_{j=2}^{i-1} \xi_j\right)\right) = \mu\xi_2 + \sum_{i=3}^{\infty} \mu\xi_i \mu\,\mathrm{sg}\left(\eta_1 - \sum_{j=2}^{i-1} \xi_j\right) =$$

$$= a\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} p\left(\sum_{j=1}^{i} \xi_j < \eta\right)\right) = a(1+H); \qquad (24)$$

$$\frac{\mu\xi_1}{\mu\nu_2} = \frac{1}{1+H} = 1 - p.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Боровков. Асимптотический анализ некоторых систем обслуживания. Теория вероятностей и ее применения, т. XI, вып. 4. М., «Наука», 1966.
2. Г. П. Климов. Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
18 февраля 1972 г.