АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1972

УДК 621.317+519.1

В. И. РАБИНОВИЧ
(Новосибирск)

О МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ «КОЛЛЕКТИВНОГО» РАЗВЕРТЫВАЮЩЕГО УРАВНОВЕШИВАНИЯ

В измерительных системах для сбора и обработки информации метод развертывающего уравновешивания может быть использован так, что в течение периода развертки будут произведены измерения сигналов нескольких источников информации. Схемную реализацию описываемого метода поясняет рис. 1.

Имеется n источников информации (каналов). Сигналы от каждого из них подаются на входы соответствующих устройств сравнения. Вторые входы этих устройств соединены с источником компенсационного напряжения.

Нарастание компенсационного напряжения происходит ступенями (квантами) при подаче на вход счетчика импульсов, поступающих от задающего генератора с периодом τ. На выходе счетчика образуется двоичный код текущего значения компенсационного напряжения U_k. В некоторый момент времени это напряжение, формируемое источником компенсационного напряжения, становится больше X_i — значения полезного сигнала в канале с номером i. При этом срабатывает i-е устройство сравнения, а связанный с ним триггер i-го канала переходит из состояния «0» в состояние «1».

Цифровой код на выходе счетчика и номер триггера, изменившего свое состояние (код соответствующего канала), записываются в буферное запоминающее устройство. Последнее необходимо, во-первых, для образования «информационного слова», формат которого согласуется с форматом соответствующего слова вычислительной машины, и, во-вторых, для сокращения числа обращений к ее оперативной памяти.

Ясно, что возможны ситуации, когда на одном такте развертки произойдет срабатывание более чем одного устройства сравнения. В то же время для одновременного формирования нескольких информационных слов требуется существенное усложнение схемы. Поэтому, если возможно образование одновременно не более k информационных слов, то при срабатывании $l(l>k)$ устройств сравнения образуется «очередь». В результате возникает своеобразная методическая погрешность: некоторым каналам приписываются бóльшие (по сравнению с фактическими значениями сигналов) значения компенсационных величин. Таким образом, исследование точности описываемой системы оказывается тесно связанным с типичной для теории массового обслуживания задачей изучения времени ожидания.

В дальнейшем рассматривается случай $k=1$. Предполагается также, что в «спорной» ситуации выбор канала, код которого записывается в буферное запоминающее устройство, производится схемой приоритета, причем во внимание принимается лишь номер канала (без ущерба для общности можно полагать, что каналы пронумерованы в соответствии с заданными приоритетами).

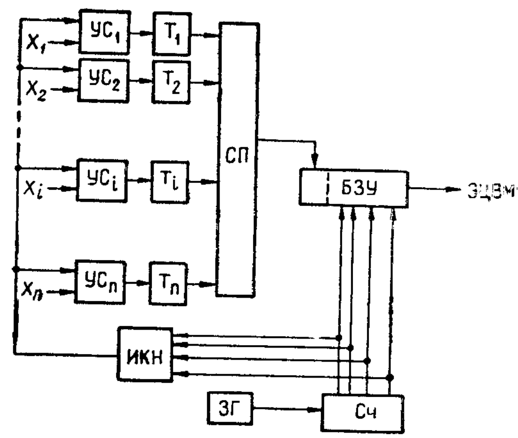

Рис. 1.

Задача исследования состоит в том, чтобы найти распределение вероятностей методической погрешности. Как правило, при решении такой задачи приходится использовать метод статистического моделирования. Однако для одной частной, но практически важной ситуации удается найти аналитическое решение: имеется в виду равномерное и независимое распределение всех полезных сигналов в заданном диапазоне измерения $D=N\Delta$. Ниже рассматривается именно такая ситуация. При этом оказывается возможным применение комбинаторных методов решения.

В дальнейшем будет удобно использовать терминологию «урновых» задач. Вместо последовательности значений компенсационного напряжения речь будет идти о последовательности урн; триггеры, изменившие свое состояние, будут именоваться шарами, попавшими в урны. Тот факт, что триггер с номером i сработал в момент $j\tau$, будет трактоваться как попадание шара с номером i в урну с номером j.

Для упрощения дальнейшего изложения введем некоторые определения и докажем ряд утверждений, касающихся размещения m шаров в n урнах. Расположим n урн в линию и поместим в них произвольным образом m шаров (в одной урне может находиться l шаров ($l=0, 1, ..., m$; $m \leqslant n$). Относительно расположения шаров в урнах, расставленных в линию, дадим следующее

о п р е д е л е н и е 1: размещение m шаров в n урнах есть размещение с вытеснением в том и только в том случае, когда найдется такое $r (1 \leqslant r \leqslant m)$, что в r крайних правых урнах находится более чем r шаров.

Все другие размещения будем именовать размещениями без вытеснения.

Перенумеруем урны справа налево порядковыми числами 1, 2, ..., n и рассмотрим некоторую конфигурацию, связанную с размещением шаров в нумерованных урнах. Особенности этой конфигурации (рис. 2) состоят в том, что в урнах с номерами 1, 2, ..., i находится $i+1$ шар, урна с номером $i+1$ пуста, а размещение $m-(i+1)$ шаров в $n-(i+1)$ урнах является размещением без вытеснения. Справедливо следующее

у т в е р ж д е н и е 1: описанная выше конфигурация задает такие и только такие размещения, которые являются размещениями с вытеснением. Достаточность очевидна, так как в i урнах расположено $i+1$ шаров. Необходимость: в исследуемой конфигурации, вообще говоря, может быть несколько таких чисел r, к которым применимо введенное выше определение. Будем именовать такие числа критическими, а наибольшее из них — наибольшим критическим числом.

Пусть r^* — наибольшее критическое число. Тогда:

1) в r^* крайних правых урнах находится ровно r^*+1 шаров (иначе r^* не является наибольшим критическим числом);

2) урна с номером r^*+1 пуста (в противном случае наибольшим критическим числом было бы r^*+1);

3) шары, расположенные в крайних слева $n-(r^*+1)$ урнах, имеют размещение без вытеснения. Действительно, если это не так, то урне с номером r^*+1 предшествует (слева) k урн, содержащих более чем k шаров. Но тогда r^*+1+k — критическое число, большее чем r^*, что невозможно.

Теперь можно доказать следующее важное утверждение 2: число размещений без вытеснения m шаров в n урнах ($m \leqslant n$) равно

$$(n-m+1)(n+1)^{m-1}. \tag{1}$$

Здесь и ниже шары считаются различными (нумерованными).

Введем обозначения: $T(n, m)$ — число размещений без вытеснения m шаров в n урнах; $S(n, m) = n^m - T(n, m)$ — число размещений с вытеснением m шаров в n урнах.

Используя эти обозначения, можно записать соотношения:

$$S(n,m) = \sum_{i=1}^{m-1} C_m^{i+1} T(n-i-1,\ m-i-1)\, i^{i+1}; \tag{2}$$

$$n^m = \sum_{i=1}^{m-1} C_m^{i+1} T(n-i-1,\ m-i-1) i^{i+1} + T(n,\ m). \tag{3}$$

Произведем в (3) замену переменной $i+1=\nu$. Тогда

$$n^m = \sum_{\nu=2}^{m} C_m^{\nu} T(n-\nu,\ m-\nu)(\nu-1)^{\nu} + T(n,\ m).$$

Если учесть, что

$$C_m^{\nu} T(n-\nu,\ m-\nu)(\nu-1)^{\nu}$$

равно $T(n, m)$ при $\nu=0$ и нулю при $\nu=1$, то

$$n^m = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} T(n-\nu,\ m-\nu)(\nu-1)^{\nu}. \tag{4}$$

Пусть функция $T(x, y)$ удовлетворяет функциональному уравнению (4) при любых n и $m (m \leqslant n)$. Тогда это уравнение имеет единственное решение. Действительно, основанную на (4) рекуррентную процедуру вычисления $T(x, y)$ можно организовать так, что выполнение любого шага процедуры будет приводить к решению линейного алгебраического уравнения с одним неизвестным.

Справедливость утверждения 2 будет доказана, если показать, что

$$n^m = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu}(n-m+1)(n-\nu+1)^{m-\nu-1}(\nu-1)^{\nu}. \tag{5}$$

Запишем очевидные равенства:

$$n^m = (m-1)^m + (n-m+1)\sum_{\nu=0}^{m-1} C_m^{\nu}(n-\nu+1)^{m-\nu-1}(\nu-1)^{\nu} =$$

$$= (m-1)^m + (n-m+1)\, z;$$

$$z = \frac{n^m-(m-1)^m}{n-(m-1)}.$$

Рис. 2.

Рис. 3.

В то же время известно, что

$$\frac{n^m-(m-1)^m}{n-(m-1)}=\sum_{\alpha=1}^{m} n^{m-\alpha}(m-1)^{\alpha-1}.$$

Таким образом, от доказательства (5) можно перейти к доказательству соотношения

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} C_m^{\nu}(n-\nu+1)^{m-\nu-1}(\nu-1)^{\nu}=\sum_{\alpha=1}^{m} n^{m-\alpha}(m-1)^{\alpha-1}. \qquad (6)$$

Из левой части равенства (6) выберем член, имеющий порядковый номер ν^*

$$C_m^{\nu^*}(n-\nu^*+1)^{m-\nu^*-1}\ (\nu^*-1)^{\nu^*},$$

и разложим в нем сомножитель

$$[n-(\nu^*-1)]^{m-\nu^*-1}$$

по формуле бинома Ньютона

$$(n-\nu^*+1)^{m-\nu^*-1}=\sum_{k=0}^{m-\nu^*-1} C_{m-\nu^*-1}^{k}\, n^{m-\nu^*-1-k}(\nu^*-1)^k(-1)^k.$$

Следовательно,

$$C_m^{\nu^*}(n-\nu^*+1)^{m-\nu^*-1}(\nu^*-1)^{\nu^*}=\sum_{k=0}^{m-\nu^*-1} C_m^{\nu^*}C_{m-\nu^*-1}^{k}\, n^{m-(\nu^*+1)-k}\times$$
$$\times(\nu^*-1)^{\nu^*+k}(-1)^k. \qquad (7)$$

Поступим таким же образом и с остальными членами суммы, записанной в левой части (6). В каждой из сумм (7) будем искать слагаемые, имеющие n с одним и тем же показателем степени. Если ввести обозначение $\nu+1+k=\alpha$, то такие слагаемые будут иметь вид

$$n^{m-\alpha}C_m^{\nu}C_{m-\nu-1}^{\alpha-\nu-1}(\nu-1)^{\alpha-1}(-1)^{\alpha-\nu-1}.$$

Образуем из них сумму, взяв по одному слагаемому в каждой из сумм (7)

$$\sum_{\nu=0}^{\alpha-1} n^{m-\alpha}C_m^{\nu}C_{m-\nu-1}^{\alpha-\nu-1}(\nu-1)^{\alpha-1}(-1)^{\alpha-\nu-1}. \qquad (8)$$

Верхний предел суммирования в (8) обусловлен тем, что подобных слагаемых имеется ровно α.

Для того чтобы завершить перестройку суммы, стоящей в левой части равенства (6), необходимо образовать сумму слагаемых (8) для всех значений $\alpha (1 \leqslant \alpha \leqslant m)$. При этом получим

$$z = \sum_{\nu=0}^{m-1} C_m^\nu (n-\nu+1)^{m-\nu-1} (\nu-1)^\nu = \sum_{\alpha=1}^{m} n^{m-\alpha} \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} C_m^\nu C_{m-\nu-1}^{\alpha-\nu-1} (\nu-1)^{\alpha-1} \times$$
$$\times (-1)^{\alpha-\nu-1}. \tag{9}$$

Из сравнения правых частей (6) и (9) следует, что справедливость утверждения 2 можно показать, доказав следующее равенство:

$$(m-1)^{\alpha-1} = \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} C_m^\nu C_{m-\nu-1}^{\alpha-\nu-1} (\nu-1)^{\alpha-1} (-1)^{\alpha-\nu-1}.$$

Этому равенству можно придать несколько иной вид, а именно:

$$(m-1)^{\alpha-1} = \alpha \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} C_m^\alpha C_{\alpha-1}^\nu (\nu-1)^{\alpha-1} (-1)^{\alpha-\nu-1} \frac{1}{m-\nu}. \tag{10}$$

Правомерность (10) следует из соотношения

$$C_m^\nu C_{m-\nu-1}^{\alpha-\nu-1} = C_m^\alpha C_{\alpha-1}^\nu \frac{\alpha}{m-\nu}.$$

Будем доказывать (10) методом математической индукции. Справедливость (10) при $\alpha=1$ очевидна. Предположим, что (10) верно при некотором α (не будем менять обозначений) и докажем справедливость (10) при $\alpha+1$, т. е. что

$$(m-1)^\alpha = (\alpha+1) \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_m^{\alpha+1} C_\alpha^\nu (\nu-1)^\alpha (-1)^{\alpha-\nu} \frac{1}{m-\nu}. \tag{11}$$

Умножим левую и правую части (10) на $m-1$ и проведем в правой части образованного таким образом произведения некоторые преобразования

$$(m-1)^{\alpha-1}(m-1) = (m-1)^\alpha = (m-1) \frac{m-\alpha}{m-\alpha} \frac{\alpha+1}{\alpha+1} \frac{\alpha-\nu}{\alpha-\nu} \alpha \times$$
$$\times \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} \frac{(\alpha-1)!}{\nu!(\alpha-1-m)!} (\nu-1)^\alpha \frac{-1}{\nu-1} (-1)^{\alpha-\nu} \frac{1}{m-\nu} =$$
$$= (\alpha+1) \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} C_m^{\alpha+1} C_\alpha^\nu (\nu-1)^\alpha (-1)^{\alpha-\nu} \frac{1}{m-\nu} \frac{\nu-\alpha}{m-\alpha} \frac{m-1}{\nu-1}. \tag{12}$$

Если (12) верно, то разность правых частей (11) и (12) равна нулю. Эта разность записывается следующим образом:

$$(\alpha+1) C_m^{\alpha+1} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\nu (\nu-1)^\alpha (-1)^{\alpha-\nu} \frac{1}{m-\nu} + C_\alpha^\alpha \frac{(\alpha-1)^\alpha}{m-\alpha} (-1)^0 + \right.$$
$$\left. + \frac{\nu-\alpha}{m-\alpha} \frac{m-1}{\nu-1} \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\nu (\nu-1)^\alpha (-1)^{\alpha-\nu} \frac{1}{m-\nu} \right\}.$$

Приравняем нулю сумму в фигурных скобках:

$$\sum_{\nu=0}^{\alpha-1} C_\alpha^\nu (\nu-1)^\alpha (-1)^{\alpha-\nu} \frac{1}{m-\nu} \left[1 - \frac{\nu-\alpha}{m-\alpha} \frac{m-1}{\nu-1}\right] + \frac{(\alpha-1)^\alpha}{m-\alpha} = 0.$$

Отсюда непосредственно следует равенство

$$p^p=\sum_{\nu=0}^{p} C_{p+1}^{\nu}(\nu-1)^p(-1)^{p-\nu}, \tag{13}$$

в котором $p=\alpha-1$.

Итак, на последнем этапе доказательства утверждения 2 следует показать справедливость соотношения (13). С этой целью разложение $(\nu-1)^p$ по формуле бинома Ньютона подставим в (13) и изменим порядок суммирования:

$$p^p=\sum_{\gamma=0}^{p} C_p^{\gamma}(-1)^{\gamma}\sum_{\nu=0}^{p} C_{p+1}^{\nu}\nu^{p-\gamma}(-1)^{p-\nu}. \tag{14}$$

Обратимся к внутренней сумме. Согласно работе*,

$$\sum_{\nu=0}^{p} C_{p+1}^{\nu}\nu^{p-\gamma}(-1)^{p-\nu}=(p+1)^{p-\gamma},$$

но тогда, подставляя $(p+1)^{p-\gamma}$ в (14), получим

$$\sum_{\gamma=0}^{p} C_p^{\gamma}(p+1)^{p-\gamma}(-1)^{\gamma}=p^p,$$

что и завершает доказательство. Таким образом,

$$T(n,\ m)=(n-m+1)(n+1)^{m-1}. \tag{15}$$

Рассмотрим два частных случая этого соотношения. Очевидно, что при $n=m$ имеем $T(n,\ m)=(n+1)^{n-1}$. Если $n>m$, то возможны такие размещения без вытеснения m шаров в n урнах, что крайняя правая урна будет пуста. Число размещений описанного вида: $T_0(n,\ m)=(n-m)n^{m-1}$. Для того чтобы получить $T_0(n,\ m)$, достаточно в (15) подставить $n-1$ вместо n.

Когда был предложен термин вытеснение, имелся в виду алгоритм, который может вытеснять некоторые из шаров за пределы r^* фиксированных урн. Назовем этот алгоритм упорядочивающим. В его состав входят две операции: проверка и перемещение. Для того чтобы проследить действие алгоритма, перенумеруем урны, начиная с крайней левой, порядковыми числами от 1 до r^*.

Первый шаг алгоритма состоит в проверке содержимого урны 1. Если она пуста или в ней находится ровно один шар, то осуществляется переход ко второму шагу алгоритма. Если же в урне 1 расположено два шара (или более), то шар с наименьшим номером** оставляется в ней, остальные — перемещаются в урну 2. При выполнении второго шага алгоритма следует иметь в виду, что в содержимое урны 2 входят как те шары, которые были расположены в ней первоначально, так и те, которые были перемещены в нее из урны 1. Второй и последующие шаги алгоритма полностью аналогичны его первому шагу. Если при проверке последней урны (ее номер r^*) обнаружится, что в ней содержится ρ ($\rho\geqslant r^*$) шаров, то в результате завершения последнего шага алгоритма $\rho-1$ шар будет перемещен (вытеснен) за пределы r^* урн.

Чтобы определить вероятность перемещения шара с номером $k+1$ на l урн вправо (вероятность возникновения методической погрешности, равной $l\Delta$, в канале с номером $k+1$), рассмотрим еще одну конфигура-

---

*Н. Я. Виленкин. Комбинаторика. М., «Наука», 1969.

** Следствие принятой дисциплины обслуживания.

цию, отражающую некоторое специфическое расположение шаров в урнах. При этом будут полезны сделанные выше замечания.

Подставим в ряд $L+l$ урн (рис. 3) и пронумеруем их слева направо номерами от 1 до $L+l$. Будем полагать, что в этих урнах расположен $S+1$ шар. В частности, шар, имеющий номер $k+1$, находится в урне с номером L. Относительно остальных S шаров делаются следующие предположения:

$S-i$ шаров, помещенных в первых $L+l-(i+1)$ урнах, образуют размещение без вытеснения такое, что урна с номером $L+l-(i+1)$ пуста, $l\leqslant i\leqslant S$;

в i урнах с номерами от $L+l-i$ до $L+l-1$ находится i шаров (они образуют размещение без вытеснения);

урна, имеющая номер $L+l$, пуста.

Теперь можно сформулировать утверждение 3: рассмотренная выше конфигурация задает такие и только такие размещения, применение к которым упорядочивающего алгоритма приводит к перемещению шара с номером $k+1$ из урны L в урну $L+l$.

Для того чтобы показать справедливость этого утверждения, нужно провести рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при доказательстве утверждения 2.

Пусть $L+l$ урн составляют начальный участок из N урн. Тогда вероятность попадания шара $k+1$ в урну с номером L равна N^{-1}. Вероятностью того, что из k шаров с номерами, меньшими чем $k+1$, ровно S попадет на участок из первых $L+l$ урн, равна

$$C_k^s\left(\frac{L+l}{N}\right)^s\left(\frac{N-L-l}{N}\right)^{k-s}. \tag{16}$$

Условная вероятность того, что $S-i$ из этих S шаров расположится в в первых $L+l-(i+1)$ урнах, а i шаров — в i последующих урнах, также является биномиальной:

$$C_s^i\left(\frac{L+l-i-1}{L+l}\right)^{s-i}\left(\frac{i}{L+l}\right)^i. \tag{17}$$

Требуется определить еще одну условную вероятность. Она должна соответствовать следующему событию:

i шаров, которые расположены в i урнах, имеющих номера от $L+$ $+l-i$ до $L+l-1$, образуют размещение без вытеснения;

$S-i$ шаров, расположенных в первых $L+l-(i+1)$ урнах, образуют размещение без вытеснения такое, что урна с номером $L+l-(i+1)$ пуста.

Искомая вероятность равна

$$\frac{T(i,\,i)}{i^i}\,\frac{T_0(L+l-i-1,\;S-i)}{(L+l-i-1)^{S-1}}=\frac{(i+1)^{i-1}}{i^i}(L+l-S-1)\frac{(L+l-i-1)^{S-i-1}}{(L+l-i-1)^{S-1}}. \tag{18}$$

Составим произведение из вероятностей (16)—(18) и N^{-1}. Проведем с его сомножителями очевидные преобразования и обозначим его $P_{k+1}(l/L,\,S,\,i)$. Тогда

$$P_{k+1}(l/L,\,S,\,i)=\frac{(N-L-l)^{k-S}}{N^{k+1}}(L+l-S-1)\,C_k^S C_S^i\times$$
$$\times(L+l-i-1)^{S-i-1}(i+1)^{i-1}.$$

$P_{k+1}(l/L,\,S,\,i)$ — вероятность того, что при фиксированных значениях

L, S, i шар с номером $k+1$ после выполнения упорядочивающего алгоритма будет перемещен на l урн вправо.

Исключим параметр $i\,(l \leqslant i \leqslant S)$:

$$P_{k+1}(l/L,\, S) = \sum_{i=l}^{S} P_{k+1}(l/L,\, S,\, i).$$

С параметром S дело обстоит несколько сложнее. Именно при $k > L + l - 1$ нельзя полагать, что $\bar{S}$ — максимальное значение S, равное k, так как в такой ситуации шар $k+1$ совершит более l перемещений. Поэтому $\max S = \bar{S} = \min(k,\, L+l-1)$ и

$$P_{k+1}(l/L) = \sum_{S=l}^{\bar{S}} \sum_{i=l}^{S} P_{k+1}(l/L,\, S,\, i).$$

Краевой эффект возникает и справа в связи с тем, что шар с номером $k+1$ может оказаться вытесненным за пределы ряда из N урн. Далее будем полагать, что этого не происходит и в подобных случаях наблюдаемый шар остается в крайней правой урне. (В терминах первоначальной формулировки задачи это означает, что результаты измерения вне зависимости от времени задержки не получают значений, больших N.) Технически такое условие реализуется весьма просто: счетчик (его емкость равна N) после заполнения продолжает генерировать код N до тех пор, пока триггеры всех каналов не возвратятся в исходное состояние.

Вероятность того, что в результате выполнения упорядочивающего алгоритма $(k+1)$-й шар переместится на l урн:

$$P_{k+1}(l) = \sum_{L=1}^{N-l-1} P_{k+1}(l/L) + \frac{1}{N} - \sum_{\lambda=0}^{l-1} P_{k+1}(\lambda/L-N-l). \tag{19}$$

Два последних члена в (19) получены из следующих соображений. Пусть шар $k+1$ находится в урне с номером $N-l$. Тогда полная система событий состоит в том, что шар, имеющий номер $k+1$, может быть (после реализации упорядочивающего алгоритма) перемещен на $0, 1, \ldots, l-1$ и l урн. Последнее событие имеет вероятность, соответствующую двум последним членам выражения (19). Запишем (19) в более удобной для вычислений форме

$$P_{k+1}(l) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^k}\Bigg[\sum_{L=1}^{N-l-1} \sum_{S=l}^{\bar{S}} (N-L-l)^{k-S} C_k^S \sum_{i=l}^{S} C_S^i (L+l-S-1) \times$$
$$\times (L+l-i-1)^{S-i-1}(i+1)^{i-1} - \sum_{\lambda=0}^{l-1} \sum_{S=\lambda}^{\bar{S}} (l-\lambda)^{k-S} C_k^S \sum_{i=\lambda}^{S} C_S^i \times$$
$$\times (N-l+\lambda-S-1)(N-l+\lambda-i-1)^{S-i-1}(i+1)^{i-1}\Bigg]. \tag{20}$$

Для аналого-цифровых преобразователей сравнительно высокой точности $N \gg k$. В этом случае доминирующую роль играют (при фиксированном k) вероятности (20) для малых значений l. Рассмотрим (20) при $l=0$. Оказывается,

$$\sum_{L=1}^{N-1} \sum_{S=0}^{\bar{S}} C_k^S (N-L)^{k-S} \sum_{i=0}^{S} C_S^i (L-S-1)(L-i-1)^{S-i-1}(i+1)^{i-1} =$$
$$= \sum_{L=1}^{N-1} \sum_{S=0}^{\bar{S}} C_k^S (L-S)(N-L)^{k-S} L^{S-1}. \tag{21}$$

Действительно, во внутренней сумме перечисляются те и только те конфигурации, для которых справедливо утверждение 3 при $l=0$, и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{S} C_S^i (L-S-1)(L-i-1)^{S-i-1}(i+1)^{i-1} = T_0(L, S) = (L-S)^{S-1}.$$

Запишем (21) для $k+1 \leqslant L \leqslant N-1$

$$\sum_{L=k+1}^{N-1}\left[\sum_{S=0}^{k} C_k^S (N-L)^{k-S} L^S - \frac{1}{L}\sum_{S=0}^{k} C_k^S S (N-L)^{k-S} L^S\right] =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{N-1}\left[N^k - \frac{1}{L} N^k k \frac{L}{N}\right] = (N-k)(N-k-1)N^{k-1}.$$

Отсюда следует, что

$$P_{k+1}(0) = \frac{1}{N^{k+1}}\sum_{L=1}^{k}\sum_{S=0}^{L-1} C_k^S (L-S)(N-L)^{k-S} L^{S-1} + \frac{(N-k)^2+k}{N^2}.$$

Аналогичным образом можно найти:

$$P_{k+1}(1) = \frac{1}{N^{k+1}}\sum_{L=1}^{k-1}\sum_{S=1}^{L} C_k^S (N-L-1)^{k-S}[(L+1-S)(L+1)^{S-1} -$$

$$-(L-S)L^{S-1}] + \frac{1}{N^{k+1}}\{(N-k-1)[(N-k)N^{k-1} - (N-k-1)\times$$

$$\times (N-1)^{k-1} + kN^{k-1}]\};$$

$$P_{k+1}(2) = \frac{1}{N^{k+1}}\sum_{L=1}^{k-2}\sum_{S=2}^{L+1} C_k^S (N-L-2)^{k-S}\{(L+2-S)(L+2)^{S-1} -$$

$$-(L+1-S)[(L+1)^{S-1} + SL^{S-2}]\} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N^{k+1}}\{(N-k)\times$$

$$\times (N-k-3)N^{k-1} - (N-k-1)[(N-k-2)(N-1)^{k-1} +$$

$$+ (N-k-1)k(N-2)^{k-2}]\}.$$

Понятно, что, имея вероятности $P_{k+1}(l)$, можно рассчитывать интегральные характеристики методической погрешности, например первый абсолютный момент (в данном случае он совпадает с математическим ожиданием)

$$M_{k+1}(l) = \sum_{i=1}^{k} P_{k+1}(i)\, i$$

или дисперсию погрешности, связанной с «коллективным» использованием метода развертывающего уравновешивания.

Автор приносит благодарность Ю. К. Постоенко, привлекшему его внимание к настоящей задаче, и З. А. Лившицу за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
18 февраля 1972 г.