А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 1972

УДК 62—505.7.001

Э. С. КАТАШКОВ, Е. Д. КОНСОН, Ю. Л. РОЗОВ
(Ленинград)

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ ОПРОСОВ В МНОГОКАНАЛЬНОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

1. Рассматривается задача выбора частоты опроса датчиков в многоканальной системе сбора информации в случае, когда регистрация данных производится на одном записывающем устройстве, к которому эти датчики подключаются через коммутатор в дискретные моменты времени. Подобная ситуация возникает при проведении автономных наблюдений или экспериментов над многомерным объектом, результаты исследования которого должны далее подвергаться дальнейшей обработке на ЭЦВМ. Одной из задач, возникающих при этом, является, как правило, восстановление исходных непрерывных сигналов датчиков по их дискретным значениям. Поэтому желательно так организовать порядок подключения каждого канала к записывающему устройству, чтобы суммарная погрешность воспроизведения была бы минимальной в смысле выбранного критерия точности.

Частично эти вопросы обсуждались в [1]. Однако автором не рассматривались условия, достаточные для отсутствия пропусков и наложений в работе регистрирующего устройства, поэтому предложенный алгоритм опроса приводил к таким ситуациям, когда в некоторые моменты регистрации требовалось записать показания нескольких датчиков, а в другие не поступало никаких данных для записи. Подробному исследованию достаточных условий отсутствия пропусков и наложений посвящена работа [2]. Тем не менее в этой статье авторами не предложено способа нахождения алгоритма опроса датчиков, удовлетворяющего полученным достаточным условиям.

Целью настоящей работы является описание процедуры отыскания такого алгоритма и оценка его эффективности в предположении, что исследуемые процессы являются стационарными случайными функциями с известными статистическими характеристиками.

2. Задача формулируется следующим образом: имеется n датчиков, показания которых $x_i(t)$ $(i=1, 2, ..., n)$ подлежат регистрации на одном записывающем устройстве для последующей обработки. Считаются заданными автокорреляционные функции исследуемых процессов $R_{x_i x_i}(\tau)$ и минимальный период дискретизации T_0, равный такту регистрирующего устройства. Показания каждого датчика записываются периодически в дискретные моменты времени с периодом $T_i=k_i T_0 \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}=1\right)$.

Требуется выбором T_i минимизировать суммарную погрешность интерполяции, характеризуемую функционалом вида

$$J=\sum_{i=1}^{n}\rho_i \max_{\varepsilon_i} M\{[x_i[(m+\varepsilon_i)T_i]-\varphi_i[x_i(jT_i),\varepsilon_i]]^2\},\tag{1}$$

где ρ_i — положительные весовые коэффициенты; $\varphi_i[x_i(jT_i),\varepsilon_i]$ — интерполированные значения $x_i(t)$; $t\in[mT_i,(m+1)T_i)$, $\varepsilon_i\in[0,1)$; $M\{\cdot\}$ — символ математического ожидания.

Таким образом, требуется минимизировать взвешенную сумму дисперсий максимальных отклонений интерполированных значений относительно истинных.

Если восстановление непрерывного процесса по его дискретным значениям осуществляется полиномами Лагранжа, то интерполированные значения $\varphi_i[x_i(jT_i),\varepsilon_i]$ — линейные комбинации $x_i(jT_i)$, а следовательно, минимизируемый функционал J является линейным относительно автокорреляционных функций $R_{x_ix_i}(\tau)$, входящих в выражение (1) в дискретные моменты времени mT_i, где m — целое число. Учитывая, что максимальное значение m равно степени интерполяционного полинома (а она обычно невысока [3]), корреляционную функцию при $\tau\leqslant m_{\max}T_i$ в ряде случаев приближенно можно записать в виде

$$R_{x_ix_i}(\tau)\approx D_i(1-\beta_i|\tau|).\tag{2}$$

Нетрудно видеть, что с учетом сделанных допущений относительно способа восстановления сигналов и характера корреляционных функций $R_{x_ix_i}(\tau)$ функционал (1) является линейным относительно T_i и может быть представлен как

$$J=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iT_i.\tag{3}$$

В частности, если $R_{x_ix_i}(\tau)=A_i^2 l^{-\gamma_i|\tau|}$, а интерполирование осуществляется полиномами Лагранжа третьей степени, минимизируемый функционал (1) равен

$$J=\frac{33}{64}\sum_{i=1}^{n}\rho_iA_i^2\gamma_iT_i.\tag{4}$$

Отметим, что после определения T_i необходимо проверить выполнение условия $3T_i<1/\gamma_i$, при котором справедливо представление рассматриваемых автокорреляционных функций в виде (2), а значит, и представление (3) для минимизируемого функционала.

3. Как известно [2], на возможные значения периодов накладываются следующие ограничения:

1) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i}=\frac{1}{T_0}$; 2) $\frac{T_i}{T_0}$ — целые положительные числа; 3) существуют такие целые a_i, что система сравнений $X\equiv a_i \bmod \frac{T_i}{T_0}$ не имеет решений ($i=1,2,\ldots,n$).

Таким образом, определение искомых периодов опроса T_i сводится к решению задачи целочисленного математического программирования с нелинейными ограничениями, что представляет значительные трудности [4].

Условия 1—3 означают, что в выходной последовательности отсутствуют пропуски и наложения. Можно построить верхнюю и нижнюю оценки для оптимального значения функционала (3) при выполнении этих условий. Действительно, используя результаты, полученные в [1], можно утверждать, что

$$J_{\text{opt}} \geqslant \min_{T_i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{T_i} = \frac{1}{T_0} \right\} = T_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} \right)^2. \tag{5}$$

С другой стороны, равномерный опрос, при котором $T_1 = T_2 = \ldots = T_n = nT_0$ всегда удовлетворяет условиям 1—3 и, следовательно,

$$J_{\text{opt}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i \Big|_{T_i = nT_0} = nT_0 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i. \tag{6}$$

Перейдем теперь к изложению процедуры последовательного отыскания наборов $T_i\,(i=1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих всем трем условиям и уменьшающих верхнюю оценку функционала.

При этом значения T_i, дающие минимальную верхнюю оценку, можно принять за приближенное решение поставленной задачи.

Датчики информации необходимо пронумеровать в такой последовательности, что $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$. На первом шаге T_i выбираются следующим образом:

1) все датчики разбиваются на две группы, в первую входят датчики с номерами $1, 2, \ldots, j$ — они имеют период опроса $2jT_0$, во вторую — $j+1, j+2, \ldots, n$ — они имеют период опроса $2(n-j)T_0$;

2) номер j выбирается так, чтобы максимально уменьшить новую верхнюю оценку, т. е. увеличить выигрыш V (разность между прежней оценкой и новой)

$$V = nT_0 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 2jT_0 \sum_{i=1}^{j} \alpha_i - 2(n-j) \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i - \max_j. \tag{7}$$

Преобразовав последнее соотношение

$$\max_j V = nT_0 \max_j \left\{ \left(1 - \frac{2j}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_i - \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i \right) \right\}, \tag{8}$$

легко убедиться, что V — унимодальная функция j, причем максимум достигается при $j \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Это обстоятельство облегчает отыскание экстремума.

Из рассмотрения выражения (8) нетрудно видеть, что минимально возможный выигрыш принимает следующие значения

$$\min_{\alpha i} \left\} \max_j \left| nT_0 \left(1 - \frac{2j}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_i - \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i \right) \right] \Big/ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = A \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0; & n = 2k; \\ -\dfrac{AT_0}{n}; & n = 2k+1. \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, при четном числе датчиков в исходной группе мы никогда не проиграем, вводя разбиение в соответствии с указанной процедурой. При нечетном числе датчиков проиграем, если

$$\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \alpha_i - \sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+2}^{n} \alpha_i > 0. \tag{10}$$

Последнее условие выполняется, когда все α_i приблизительно одинаковы, т. е. когда значение функционала J при равномерном опросе (6) близко к оптимальному. Покажем это формально, анализируя промежуток возможных оптимальных значений функционала (1) при выполнении условия (10)

$$\Delta_J = \max_{\alpha_j} \left\{ \frac{T_0 n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - T_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} \right)^2}{T_0 n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \middle| \begin{array}{l} \text{а) } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = A; \\ \text{б) } \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \alpha_i - \sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+2}^{n} \alpha_i > 0. \end{array} \right\} \tag{11}$$

Можно показать, что из условий а) и б) с учетом правила нумерации датчиков следуют соотношения:

$$\alpha_1 > 0;$$

$$\alpha_i \geqslant A \frac{i - n + 2\left[\frac{n}{2}\right]}{2j\left[\frac{n}{2}\right]}; \quad i = 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1; \tag{12}$$

$$\alpha_i \geqslant A \frac{3\left[\frac{n}{2}\right] - n + 1}{2\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)}; \quad i = \left[\frac{n}{2}\right] + 2, \ldots, n - 1;$$

$$\alpha_n \geqslant \frac{A}{n}.$$

Отсюда непосредственно вытекает

$$\Delta_J < 1 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sqrt{\frac{i - n + 2\left[\frac{n}{2}\right]}{2j\left[\frac{n}{2}\right]}} + \left(n - \left[\frac{n}{2}\right] - 2\right) \times \right.$$

$$\left. \times \sqrt{\frac{3\left[\frac{n}{2}\right] - n + 1}{2\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)}} + \sqrt{\frac{1}{n}} \right]^2. \tag{13}$$

Пользуясь полученной оценкой, легко убедиться, что Δ_J при увеличении n убывает и стремится к нулю не медленнее, чем $1/n$. Итак, при достаточно больших нечетных n указанная процедура приводит к проигрышу, когда равномерный опрос с одинаковыми периодами для всех каналов мало отличается от оптимального решения. При больших четных n подобные оценки показывают, что нулевой выигрыш соответствует случаю, когда промежуток возможных оптимальных значений функционала тоже мал и имеет порядок $1/n$. Таким образом, излагаемая процедура неэффективна на первом шаге, если оптимальный алгоритм опроса мало отличается от равномерного и последний можно принять за приближенное решение.

Если разбиение на две группы приводит к выигрышу, то на следующем шаге каждая полученная группа рассматривается как исходная и снова разбивается так, чтобы выполнялось условие, аналогичное (7) и т. д.

Процедура остановится, когда не останется ни одной группы датчиков, разбивая которую на две мы можем уменьшить верхнюю оценку функционала, т. е.

$$nT_0 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > J_1 > J_2 > \ldots . > J_k = J_{k+1}. \tag{14}$$

При этом число шагов $k+1$ и выигрыш $V = nT_0 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - J_{k+1}$ зависит от конкретных значений α_i.

Описанная процедура легко программируется и может быть использована в автоматизированных системах сбора информации.

4. Пример. Пусть $\alpha_1=0{,}29$; $\alpha_2=1{,}40$; $\alpha_3=4{,}75$; $\alpha_4=5{,}14$; $\alpha_5=6{,}15$; $\alpha_6=18{,}2$; $\alpha_7=47{,}1$; $\alpha_8=60{,}1$; $\alpha_9=76{,}6$; $\alpha_{10}=82{,}5$; $\alpha_{11}=136$.

Убедившись, что на первом шаге (10) не выполняется, т. е. $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i - \sum_{i=7}^{11} \alpha_i < 0$, находим $j=7$, т. е. разбиваем датчики на две группы 1—7 (период 14 T_0) и 8—11 (период 8 T_0). На втором шаге аналогично разбиваем группу 1—7 на две; 1—5 (период 20 T_0) и 6—7 (период 8 T_0); убеждаемся, что, разбивая группу 8—11 на две, мы не выиграем. На третьем шаге, так как $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5=-4{,}85<0$, для группы 1—5 находим $j=3$. Получаем новые группы 1—3 (период 24 T_0) и 4—5 (период 16 T_0). На четвертом шаге, проверив $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=-3{,}06<0$, делим группу 1—3 на две: 1, 2 (период 32 T_0) и 3 (период 16 T_0). На этом процедура заканчивается. В результате получаем: $T_1=T_2=32\ T_0$; $T_3=T_4=T_5=16\ T_0$; $T_6=T_7= \ldots =T_{11}=8\ T_0$.

Относительный выигрыш в использовании такого алгоритма опроса по сравнению с равномерным, определяемый как сокращение величины исходного промежутка возможных оптимальных значений функционала, составляет в этом случае

$$v = \frac{nT_0 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - T_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} \right)^2}{J_{k+1} - T_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} \right)^2} = 3{,}6. \tag{15}$$

5. В заключение отметим, что линейность функционала (1) использовалась только для получения оценок (11)—(13). Процедура же, как правило, приводит к выигрышу и в случае нелинейного функционала, если датчики можно пронумеровать так, что в промежутке возможных значений периодов опроса выполняются соотношения:

$$J\big|_{T_1=\tau,\ T_2=T_3=\ldots=T_n=0} \leqslant J\big|_{T_2=\tau,\ T_1=T_3=\ldots=T_n=0} \leqslant \ldots \leqslant J\big|_{T_n=\tau,\ T_1=T_2=\ldots=T_{n-1}=0}, \tag{16}$$

т. е. оптимальное решение удовлетворяет неравенствам:

$$T_1 \geqslant T_2 \geqslant \ldots \geqslant T_n. \qquad (17$$

Так будет, например, когда корреляционные функции аппроксимируются следующим образом:

$$R_{x_i x_i}(\tau) = D_i\,(1 - \beta_i\,|\tau|^k). \qquad (18)$$

Однако построить оценки типа (11)—(13) и указать строго эффективность процедуры в этом случае значительно сложнее.

Авторы считают приятным долгом выразить благодарность профессору И. Б. Челпанову, ознакомившемуся с рукописью работы и сделавшему ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Е. Мирошник. Оптимальное квантование во времени при опросе группы датчиков.— Автоматика и вычислительная техника (Рига), 1969, № 6.
2. Е. И. Шушков, М. Б. Цодиков. Распределение отсчетов в многоканальных системах.— Труды ВНИИЭП, № 2 (6). Л., 1969.
3. Ю. Л. Розов, И. Б. Челпанов. О погрешности интерполяции случайной функции по дискретным данным.— Измерительная техника, 1968, № 2.
4. А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. Дискретное программирование. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию
16 ноября 1971 г.