АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
1972
№ 3

ТЕОРИЯ СИСТЕМ СБОРА И ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

УДК 621.383.81

И. Н. СВЕНТИЦКАЯ, Ю. А. ШАПИРО
(*Ленинград*)

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПО ЭЛЕКТРОННОМУ ИЗОБРАЖЕНИЮ

Оптические спектры излучения, сопровождающие быстропротекающие процессы, измеряют, применяя электронно-оптические системы преобразования энергии в сочетании с методами осциллографической регистрации. При этом учет систематических погрешностей, вносимых приборами, производится путем введения так называемой аппаратной функции. В настоящей работе рассматривается задача восстановления исследуемых спектров излучения по результатам измерений их электронно-оптических сигналов.

Пусть известна приближенная аппаратная функция прибора, построенная на основе экспериментальных измерений и заданная в виде $Q(x-s)$, $-l\leqslant(x-s)\leqslant l$. Она описывает полный спектр, получаемый вдоль некоторой оси развертки OX, от источника единичной интенсивности с координатой s по оси OS. В соответствии с физическим смыслом $Q(x-s)$ можно считать $Q(y)$ непрерывной на $[-l,\ l]$ и такой, что

$$Q(l)=Q'(0)=Q'(l)=0.$$

Предположим, что исследуется спектр излучения шириной $[-h_1,\ h_1]$ с плотностью, характеризуемой неизвестной функцией $\varphi_1(s)$. В результате прохождения через прибор получается экспериментальный спектр, распределенный на интервале $[-h,\ h]$, где $h=h_1+l$. Обозначим функцию приближающую экспериментальный спектр, через $f(x)$.

Будем считать, что аппаратная функция прибора задана на более широком интервале $[-h,\ h]$ в виде $K_1(x-s)$;

$$K_1(x-s)=\begin{cases}Q(x-s); & |x-s|\leqslant l;\\ 0; & l<|x-s|\leqslant h.\end{cases} \tag{1}$$

Очевидно, что такое продолжение $Q(x-s)$ нулем возможно, так как фактически не изменяет аппаратной функции.

Введем в рассмотрение неизвестную функцию $\varphi(s)$, заданную на интервале $[-h,\ h]$ таким образом, чтобы она являлась продолжением искомой функции $\varphi_1(s)$, т. е. $\varphi(s)=\varphi_1(s)$ при $s\in[-h_1,\ h_1]$. Тогда связь между указанными величинами может быть записана в виде следующего интегрального уравнения 1-го рода:

$$\int_{-h}^{h} K_1(x-s)\,\varphi(s)\,ds=f(s). \tag{2}$$

Запишем уравнение (2) в операторной форме:

$$K_1\varphi=f.$$

Здесь φ и f можно считать принадлежащими пространству $L_2[-h, h]$, K_1 — вполне непрерывный в $L_2[-h, h]$ оператор, так как $K_1(y)$ — ограниченная функция, достаточно гладкая по условиям измерений.

Обратное отображение K^{-1}, с помощью которого из уравнения (1) должно быть определено решение φ, неустойчиво, и задача определения φ по приближенным значениям f математически некорректна.

Это означает невозможность восстановления $\varphi(s)$ по приближенным значениям $f(x)$, так как сколь угодно малым погрешностям в измерении $f(x)$ соответствуют сколь угодно большие ошибки в определении $\varphi(s)$. Как известно, для решения такого рода неустойчивых задач обычно применяют регуляризацию [1, 2].

При этом приближенное решение $\tilde{\varphi}(s)$ уравнения (2′), непрерывно зависящее от $f(x)$, находят с помощью некоторого численного регуляризирующего алгоритма, при построении которого существенно используют априорную информацию о решении, связанную с природой исследуемых явлений.

В данной работе строится такой регуляризирующий алгоритм для определения приближенного решения $\tilde{\varphi}$ уравнения (2). Среди ряда мер по повышению устойчивости получаемого приближения существенную роль играет использование в качестве аппаратных функций специального вида, построенных на основании (1).

Итак, введем наряду с $K_1(y)$ функцию $K(y)$ таким образом:

$$K(y)=\begin{cases}Q(y); & |y|\leqslant l_1;\\ 0; & l_1<|y|\leqslant h.\end{cases} \qquad (1')$$

При $|y|=l_1<l$ функция $K(y)$ имеет разрыв 1-го рода. Ниже будет показано, что в данном случае величина l_1 является параметром регуляризации.

Далее, вместо уравнения (2) будем рассматривать решение уравнения

$$\int\limits_{-h}^{h}K(x-s)\tilde{\varphi}(s)\,ds=f(x), \qquad (3)$$

где $\tilde{\varphi}(s)$ — приближение к искомой функции $\varphi(s)$, или: (3′)

$$K\tilde{\varphi}=f.$$

Здесь считаем $\tilde{\varphi}\in L_2[-h, h]$; оператор K вполне непрерывен в $L_2[-h, h]$.

Пусть в пространстве решений имеется полная ортонормированная система функций $\psi_n(s)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Введем N-мерное подпространство, составленное из $\psi_n(s)$ $(n=0, 1, \ldots, N)$. Будем искать приближенное решение $\tilde{\varphi}(s)$ в виде функции $\varphi^N(s)$ из данного подпространства

$$\varphi^N(s)=\sum_{n=0}^{N}a_n\psi_n(s). \qquad (4)$$

Предполагая дополнительно априорную гладкость искомого решения $\varphi(s)$, описывающего исследуемый спектр, можно показать, что при некотором N, зависящем от $\varepsilon>0$, справедливо

$$\| P_N \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} \| < \varepsilon,$$

где $P_N \tilde{\varphi}$ — проекция искомого решения на N-мерное подпространство. Величина $N(\varepsilon)$ зависит от конкретного выбора системы $\psi_n(s)$ и характера гладкости функции $\tilde{\varphi}(s)$.

Спроецируем на это же подпространство правую часть уравнения (3′), т. е. функцию $f(x)$, приближающую экспериментальный спектр:

$$P_N f = f^N = \sum_{n=0}^{N} C_n \psi_n(x). \tag{5}$$

Далее, для построения $\varphi^N(s)$ уравнение (3′) заменим приближенным уравнением

$$K\varphi^N = f^N. \tag{6}$$

Как указывается в [3, 4], при применении подобного рода проекционных методов целесообразно в качестве системы $\psi_n(s)$ выбрать систему собственных функций оператора K уравнения (3′). Такой выбор системы $\psi_n(s)$ позволяет получить наиболее устойчивый и максимально простой алгоритм вычислений и обеспечивает наилучшее приближение $\varphi^N(s)$ к точному решению $\tilde{\varphi}(s)$ уравнения (3).

Для интегрального оператора K в уравнении (3) с ядром $K(x-s)$ типа свертки и таким, что $K(y) \in L_2[-h, h]$, как в (1′), функции вида

$$\psi_m(s) = \frac{1}{\sqrt{h}} \cos \frac{m\pi s}{h} \tag{7}$$

являются собственными, т. е.

$$K\psi_m = \lambda_m \psi_m. \tag{7′}$$

Вычислим спектр собственных чисел λ_m. Одновременно тем самым доказывается справедливость (7′). Примем для простоты дальнейших вычислений $\tilde{\varphi}(s)$, $f(x)$ и $K(y)$ принадлежащими пространству $\tilde{L}_2[-h, h]$ четных функций в $L_2[-h, h]$. Система $\psi_m(s)$ из (7) полна в $\tilde{L}_2[-h, h]$, поэтому $K(x-s)$ можно представить в виде соответствующего ряда Фурье:

$$K(x-s) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \cos \frac{n\pi (x-s)}{h} \right); \tag{8}$$

$$b_n = 2 \int_0^h K(y) \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \cos \frac{n\pi y}{h} \right) dy; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Подставим в левую часть уравнения (3) $K(x-s)$ из (8) и $\psi_m(s)$ из (7). Меняя в (3) порядок суммирования и интегрирования и производя интегрирование, получаем с учетом ортогональности на $[-h, h]$ соответствующих тригонометрических функций:

$$\frac{b_0}{2\sqrt{h}} \int_{-h}^{h} \cos \frac{n\pi s}{h} ds + \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{h} \int_{-h}^{h} \cos \frac{n\pi s}{h} \cos \frac{m\pi s}{h} ds +$$

$$+ \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{h} \int_{-h}^{h} \sin \frac{n\pi s}{h} \cos \frac{m\pi s}{h} ds = b_m \cos \frac{m\pi x}{h}, \tag{10}$$

откуда

$$\lambda_m = \sqrt{h}\, b_m, \tag{11}$$

где b_m определены в (9).

Таким образом, $\psi_m(s)$ в (7), действительно, собственные функции оператора K в (3′), причем их система полна в $\widetilde{L}_2[-h, h]$, поэтому (5) и (4) принимают вид:

$$\varphi^N(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\left(\frac{1}{\sqrt{h}} \cos\frac{n\pi s}{h}\right); \tag{4′}$$

$$f^N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n\left(\frac{1}{\sqrt{h}} \cos\frac{n\pi x}{h}\right). \tag{5′}$$

Здесь c_n — коэффициенты ряда Фурье для $f(x)$ по системе $\psi_n(x)$:

$$c_n = 2\int_0^h f(z)\frac{1}{\sqrt{h}}\cos\frac{n\pi z}{h}\, dz. \tag{12}$$

Для определения коэффициентов a_n в приближенном решении $\varphi^N(s)$ в (3) подставим (4′), (5′) и (8) в уравнение (6). Затем, проведя преобразования, аналогичные (10), получим, если приравняем коэффициенты при $\cos\frac{n\pi x}{h}$ в обеих частях уравнения (6):

$$a_n b_n = c_n, \tag{13}$$

или

$$a_n = \frac{c_n}{b_n}, \tag{13′}$$

т. е. искомые коэффициенты a_n формально выражаются через коэффициенты b_n и c_n, определяемые по (9) и (12) с помощью формул численного интегрирования. Следовательно, удается построить $\varphi^N(s)$ — приближенное решение уравнения (3) — в виде разложения по наиболее удобной из возможных ортонормированных систем, полной в $L_2\,[-h, h]$ системе собственных функций оператора K.

Описанный метод тем устойчивее, чем медленнее убывают с номером собственные числа λ_n в (11) [3], т. е. коэффициенты b_n в (9), определяющие вместе с c_n из (12) поведение искомых коэффициентов a_n в (13).

Вычисляя b_n в (12), мы используем задание $K(y)$ в (1′), при этом существенную роль играет выбор величины l_1, определяющей характер гладкости подынтегральной функции. Проведем в (12) трижды интегрирование по частям. Учитывая, что $Q'(0)=0$, имеем

$$b_n = \sqrt{h}\left(\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi l_1}{h} Q(l_1) + \frac{h^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi l_1}{h} Q'(l_1) - \frac{h^3}{n^3\pi^3} Q''(l_1)\sin\frac{n\pi l_1}{h} + \right.$$
$$\left. + \frac{h^3}{n^3\pi^3}\int_0^{l_1} Q'''(y)\sin\frac{n\pi y}{h}\, dy\right). \tag{14}$$

Из (14) видно, что при $\frac{l_1}{h} \neq 0$ и достаточно больших n справедливы оценки: $b_n \geqslant \frac{c_1}{n} - \frac{c_2}{n^2}$ при $\frac{nl_1}{h} \neq k,\ k = 1, 2, \ldots$;

$$b_n \geqslant \frac{c_3}{n^2} - \frac{c_4}{n^3} \text{ при } \frac{nl_1}{h} = k, \; k = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

c_1, c_2, c_3, c_4 — постоянные. Что же касается коэффициента c_n в (13), то по (12) для него существенную роль играет гладкость функции $f(x)$. Функция $f(x)$ строится по совокупности экспериментальных значений. В соответствии с априорной гладкостью искомого решения $\varphi(s)$ и при учете свойств функции $Q(y)$ следует считать $f(x)$ непрерывной на $[-h, h]$ с первой производной, причем

$$f(h) = f'(0) = f'(h) = 0.$$

В этом случае для c_n в (12) справедлива оценка

$$c_n \leqslant \frac{c_5}{n^3}. \tag{16}$$

Объединяя (13), (15), (16), имеем

$$|a_n| \leqslant \frac{c}{n^\alpha}, \tag{17}$$

где $\alpha \geqslant 1$; c — постоянная. Оценка (17), как видно из (14), (15), улучшается при увеличении значений $Q(l_1)$ и $Q'(l_1)$, т. е. в данном случае при уменьшении l_1. Однако замена исходного уравнения (2) уравнением (3) приводит к тому, что при подстановке $\widetilde{\varphi}$ — решения уравнения (3) — в уравнение (2), возникает невязка правой части. Можно показать, что норма невязки в $\widetilde{L}_2[-h, h]$ оценивается так:

$$\|\delta f\|_{\widetilde{L}_2[-h,h]} \leqslant d \left[(l - l_1) \int\limits_{l_1}^{l} Q^2(y)\, dy \right]^{1/2} \|\widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{L}_2[-h,h]}, \tag{18}$$

где d — постоянная, а $\|\widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{L}_2[-h,h]}$ априорно считаем ограниченной. Таким образом, уменьшение l_1, как указывалось, улучшает оценку (17), с одной стороны, но увеличивает невязку (18) исходного уравнения (2) — с другой. Величина l_1 — параметр регуляризации и ее оптимальное значение выбирается экспериментально по минимуму невязки уравнения (2).

Переходим к вопросу о вычислении искомых коэффициентов a_n по формулам (9), (12), (13).

Приближенное интегрирование в (9) и (10) производится по квадратурным формулам с $(M+1)$-м узлом.

Для рассматриваемых задач характерно, что при экспериментальных измерениях спектра вносится шум, частота которого определяется шагом измерения. Этот шум целесообразно отфильтровать при обработке данных. Это равносильно тому, что при выбранном M существует наилучшее N, оптимально приближающее $\varphi^N(s)$ к $\widetilde{\varphi}$ (оптимальный фильтр).

Выбор M и N может производиться экспериментально на ЭВМ, путем обеспечения минимального значения функционала $S^2_{M,N}$, характеризующего невязку уравнения (2), т. е. например

$$S^2_{M,N} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{M} \left(f_i - \sum\limits_{j=0}^{M} K_{ij} \rho_j \varphi_j^N \right)^2}{M+1}, \tag{19}$$

где K_{ij} — элементы ядра уравнения (1); ρ_j — веса квадратурной формулы; φ_j^N и f_i — значения $\varphi^N(s)$ и $f(x)$ в j-м и i-м узлах (под f_i понимаются обычно усредненные по шуму значения f [4]).

Иногда для сокращения вычислений может быть произведена ориентировочная оценка числа N, зависящего от M. Рассмотрим величину $\delta^2_{N,M}$, характеризующую погрешность приближенного решения уравнения (3) $\varphi^N(s)$. Она может быть выражена так:

$$\delta^2_{N,M} = \left(\delta^{(1)}_N\right)^2 + \left(\delta^{(2)}_{N,M}\right)^2. \tag{20}$$

Здесь $\left(\delta^{(1)}_N\right)^2$ обусловлена отбрасыванием в приближенном решении $\varphi^N(s)$ остатка ряда Фурье, а $\left(\delta^{(2)}_{N,M}\right)^2$ зависит от среднеквадратичной погрешности δf правой части $f(x)$ в (3). Из (4′) следует

$$\left(\delta^{(1)}_N\right)^2 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2.$$

Для последней величины при больших N в силу (17) можно записать

$$\left(\delta^{(1)}_N\right)^2 \leqslant \frac{d_1}{N}, \tag{21}$$

где d_1 — постоянная. Для оценки $\left(\delta^{(2)}_{N,M}\right)^2$ используется вид $\varphi^N(s)$ в (4′) и известные формулы для дисперсии функций случайной величины [4]

$$\left(\delta^{(2)}_{N,M}\right)^2 \leqslant \delta^2 a_m \sum_{m=0}^{N} \cos^2 \frac{m\pi s}{h}, \tag{22}$$

где δa_m — дисперсия коэффициента a_m, зависящая от дисперсии правой части $f(x)$.

Если a_m в (12) вычисляются с применением квадратурных формул с $(M+1)$-м узлом, то

$$\delta^2 a_m \leqslant \delta^2 f \frac{1}{M^2} \sum_{m=0}^{M} \cos^2 \frac{m\pi s}{h}. \tag{23}$$

Объединяя (23) и (22) и учитывая, что

$$\sum_{m=0}^{N} \cos^2 \frac{m\pi s}{h} \leqslant \frac{3}{2} N,$$

получим

$$\left(\delta^{(2)}_{N,M}\right)^2 \leqslant d_2 \frac{\delta^2 f N}{M}, \tag{24}$$

где d_2 — постоянная. Из (20), (21) и (24) имеем

$$\delta^2_{N,M} \leqslant d_2 \frac{\delta^2 f N}{M} + \frac{d_1}{N}, \tag{25}$$

где постоянные d_1 и d_2 определяются данными задачи. Последнее неравенство показывает, что существует оптимальное N, связанное с M, обеспечивающее наименьшее значение величины $\delta^2_{N,M}$. При $N, M \longrightarrow \infty$ и $\frac{N}{M} \longrightarrow 0$ величина $\delta^2_{N,M}$ неограниченно уменьшается.

Известно, что суммирование рядов Фурье, вообще говоря, процесс нерегулярный. Поэтому в данной работе предлагается один из методов обобщенного суммирования рядов, а именно метод суммирования по Фейеру. Такая процедура может улучшить результат вычислений фактически без заметного увеличения их объема.

Приближение к решению суммами Фейера 1-го порядка имеет вид:

$$\varphi_p^N(s) = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{p} \varphi^p(s); \quad \varphi^p(s) = \sum_{m=0}^{p} a_m \frac{1}{\sqrt{h}} \cos \frac{m\pi s}{h}. \tag{26}$$

Можно использовать подобные суммы более высокого порядка, образуемые аналогично (26) из сумм предшествующего порядка.

Следует сказать, что для простоты описания мы накладывали требования четности функций $\varphi(s)$, $f(x)$, $K(y)$, которые не принципиальны, и рассмотренный алгоритм легко обобщается на случай несимметричных спектров. По описанному алгоритму решения задачи составлены программы на языке АЛГОЛ-60, и на ЭВМ проведено восстановление спектров, получаемых с помощью диссектора со щелью типа ЛИ-602 [5]. Аппаратная функция прибора аппроксимируется гауссовой кривой. Среднеквадратичная ошибка восстановления известного сигнала различного спектрального состава при наличии ошибки в $f(x)$, распределенной по нормальному закону с дисперсией 1/10, достигала 3—5%.

В заключение отметим, что составленные программы предназначены для автоматизации комплекса аппаратуры, служащей для спектральных измерений и включающей ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, В. К. Иванов, М. М. Лаврентьев. Некорректно поставленные задачи. Труды симпозиума по дифференциальным уравнениям в частных производных. Новосибирск, 1970.
2. М. М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
3. С. Г. Михлин. Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1969.
4. Е. П. Миронов, М. И. Пергамент, И. В. Тихомиров, Ю. А. Шапиро. Диагностика плазмы, т. III. М., Атомиздат, 1971.
5. Л. И. Диамант, А. М. Искольдский, М. И. Кудряшов, Ю. Е. Нестерихин. Анализ пространственного разрешения двойного электронно-оптического преобразователя.— Теплофизика высоких температур, 1970, т. VIII, № 1.

Поступила в редакцию
23 февраля 1971 г.,
окончательный вариант —
20 октября 1971 г.