АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1972

УДК 621.391.234

В. А. ВИТТИХ, В. П. ЯКИМАХА
(*Куйбышев*)

ПРИМЕНЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ СИГНАЛОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ АДАПТИВНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Введение. При адаптивной дискретизации необходимо оценивать текущую погрешность аппроксимации сигнала. С этой целью часто применяются оценочные методы, позволяющие приближенно определить величину ошибки (так, например, при полиномиальной аппроксимации оценка производится по первому отброшенному члену степенного ряда). Это обычно упрощает вычислительные процедуры и приводит к несложным техническим решениям. Предложен ряд приближенных методов оценок погрешности [1—3], но единого подхода к выбору того или иного алгоритма пока нет.

В данной статье излагается методика синтеза алгоритмов оценок погрешностей, исходя из заданных условий. Предлагаемый подход основан на использовании структурных моделей сигналов. Структурная модель сигнала — это уравнение, устанавливающее определенную связь между производными, интегралами, а также любыми другими функциональными преобразованиями сигнала [4]. Первым этапом синтеза является выбор класса операторов, преобразующих сигнал. Затем формируется структурная модель, т. е. уравнение связи между функциями, являющимися результатами этих преобразований. Выбор коэффициентов связи зависит от поставленных ограничений. Например, может быть сформулировано условие инвариантности к параметрам сигнала, которые не представляют интереса для исследователя [4]. Необходимым условием является инвариантность структурной модели к параметрам аппроксимирующей функции. Это означает, что структурная модель определяет некоторую функцию, отличную от нуля только в том случае, если сигнал на отрезке аппроксимации отличается от выбранной математической модели. Например, если используется кусочно-полиномиальная аппроксимация, то структурная модель должна быть инвариантна по отношению ко всем коэффициентам аппроксимирующего полинома.

Таким образом с помощью структурной модели задается функция погрешности аппроксимации. Важным вопросом является связь этой функции с величиной действительной погрешности аппроксимации по тому или иному критерию. В работе исследуется возможность оценки максимального уклонения с помощью различных структурных моделей для случая кусочно-линейной аппроксимации.

Постановка задачи и ограничения. Пусть сигнал является функцией времени $s(t)$. На отрезке $[0, t_1]$ функция $s(t)$ интерполируется прямой $\varphi(t, t_1)$, проходящей через точки $s(0)$ и $s(t_1)$:

$$\varphi(t, t_1) = s(0) + \frac{s(t_1) - s(0)}{t_1} t.$$

Погрешность интерполяции $\varepsilon(t, t_1)$ равна

$$\varepsilon(t, t_1) = s(t) - \varphi(t, t_1).$$

Наибольшее значение модуля $\varepsilon(t, t_1)$, являющееся при заданной $s(t)$ функцией длины интервала $[0, t_1]$, обозначим $\varepsilon_m(t_1)$

$$\varepsilon_m(t_1) = \max_{0<t<t_1} |\varepsilon(t, t_1)|.$$

Адаптивная дискретизация предусматривает слежение за величиной $\varepsilon_m(t_1)$ при увеличении длины интервала $[0, t_1]$ и сравнение ее с допустимой погрешностью ε_0. В момент времени $t_1 = T$, когда $\varepsilon_m(T) = \varepsilon_0$, производится выборка значения функции $s(T)$.

Как уже отмечалось, точное вычисление величины $\varepsilon_m(t_1)$ не всегда целесообразно. Представляет интерес рассмотрение приближенных способов определения интервала дискретизации $[0, T]$. Сущность их состоит в том, что вместо $\varepsilon_m(t_1)$ вычисляется другая функция (обозначим ее $y(t_1)$), служащая оценкой $\varepsilon_m(t_1)$. Будем рассматривать функции $y(t_1)$ следующего вида:

$$y(t_1) = F[t_1, s(t)],$$

где F — линейный оператор. Отметим необходимые свойства, которыми должна обладать $y(t_1)$:

$$y(t_1) = 0, \tag{2}$$

$$\text{если } \varepsilon_m(t_1) = 0;$$

$$\max_{0<t_1<T} |y(t_1)| > 0,$$

$$\text{если } \varepsilon_m(T) > 0. \tag{3}$$

Условие (2) означает, что решением однородного уравнения

$$F[t_1, s(t)] = 0 \tag{4}$$

должна быть функция $s_0(t)$ вида

$$s_0(t) = c_0 + c_1 t, \tag{5}$$

где c_0 и c_1 — произвольные постоянные. Для функций, отличных от $s_0(t)$ [условие (3)], функция $y(t_1)$ не должна быть равна нулю, за исключением, быть может, отдельных значений аргумента t_1.

Очевидно, что число функций $y(t_1)$, удовлетворяющих (2) и (3), может быть сколь угодно большим, и все они в той или иной мере могут быть использованы для оценки погрешности интерполяции. Простейшим примером в случае дифференцируемой функции $s(t)$ является функция, определяемая левой частью однородного дифференциального уравнения

$$\frac{ds(t_1)}{dt_1} - \frac{1}{t_1} s(t_1) = 0,$$

решением которого является функция $s_1(t)=c_1 t$ с произвольным коэффициентом c_1 (при этом предполагается $s(0)=0$).

Однако на практике выдвигается еще одно требование, которое можно назвать требованием точности оценки. Сформулировать его можно следующим образом. Если на интервале $[0, T]$ функция $y(t_1)$ не превышает некоторой величины δ_0, а именно:

$$|y(t_1)| \leqslant \delta_0; \quad 0 < t_1 < T; \quad |y(T)| = \delta_0, \tag{6}$$

то максимальная ошибка $\varepsilon_m(T)$ должна находиться в пределах

$$M' \leqslant \varepsilon_m(T) \leqslant M'',$$

где M' и M'' — соответственно нижний и верхний допустимые пределы изменения $\varepsilon_m(T)$, причем обычно требуется, чтобы $M''=\varepsilon_0$.

Точному вычислению ошибки соответствует $M'=M''$. Точность приближенной процедуры будет тем выше, чем меньше число η, определяемое из соотношения

$$\eta = \frac{M'' - M'}{M''} = 1 - \frac{M'}{M''}.$$

Рассмотрим способы выбора структурных моделей по критерию точности оценки. По условию (2), оператор F должен быть инвариантен к любой функции вида (5), т. е. для $\varphi(t, T)$ также выполняется

$$F[t_1, \varphi(t, T)]=0. \tag{7}$$

С учетом (1) и (7) функцию $y(t_1)$ можно представить в следующем виде:

$$y(t_1)=F[t_1, s(t)]-F[t_1, \varphi(t, T)]=F[t_1, \varepsilon(t, T)]. \tag{8}$$

Оценим норму функции $y(t_1)$

$$\|y(t_1)\| \leqslant \|F\| \|\varepsilon(t, T)\|. \tag{9}$$

Так как $\|y(t_1)\|=\delta_0$, а $\|\varepsilon(t, T)\| = \varepsilon_m(T)$, то (9) перепишем в виде

$$\varepsilon_m(T) \geqslant \frac{\delta_0}{\|F\|}. \tag{10}$$

Следует оговориться, что оценки (9), (10) могут быть несколько улучшены, если учесть, что $|y(T)|=\delta_0$, а $\varepsilon(T, T)=0$. Если преобразование F имеет единственное обратное преобразование F^{-1}:

$$\varepsilon(t, T)=F^{-1}[t, y(t_1)],$$

оценивая норму $\varepsilon(t, T)$, получим

$$\|\varepsilon(t, T)\| = \|F^{-1}\| \|y(t_1)\|,$$

т. е.

$$\varepsilon_m(T) \leqslant \|F^{-1}\| \delta_0, \tag{11}$$

а с учетом (10)

$$\frac{\delta_0}{\|F\|} \leqslant \varepsilon_m(T) \leqslant \|F^{-1}\| \delta_0. \tag{12}$$

Чтобы $\varepsilon_m(T)$ не превышала ε_0, положим

$$\|F^{-1}\| \delta_0=\varepsilon_0. \tag{13}$$

Подставив δ_0 из (13) в (12), получим

$$\frac{\varepsilon_0}{\|F\| \|F^{-1}\|} \leqslant \varepsilon_m(T) \leqslant \varepsilon_0.$$

Таким образом, при использовании различных операторов F наиболее точную оценку будет давать тот, у которого произведение $\|F\|\ \|F^{-1}\|$ минимально.

Естественно, что такая минимизация может быть осуществлена только в случае ограниченности обоих операторов F и F^{-1}. В случае неограниченности этих операторов или трудности оценки их норм выбор можно производить по условиям оценки погрешности для конкретных классов сигналов. Например, если функция $s(t)$ является полиномом

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n t^n,$$

то погрешность интерполяции на отрезке $[0, T]$ будет равна:

$$\varepsilon(t,T) = s(t) - \varphi(t,T) = \sum_{n=2}^{N} a_n (t^n - tT^{n-1}).$$

Можно показать, что при любом N оценкой $\varepsilon_m(T)$ может служить функция $y_1(t_1)$, равная

$$y_1(t_1) = \sum_{n=2}^{N} a_n \max_{0<t<t_1} (tt_1^{n-1} - t^n); \quad 0 < t_1 \leqslant T,$$

если для нее выполняются условия (5).

Синтез алгоритмов. Приведем примеры синтеза алгоритмов оценки погрешности аппроксимации.

Пример 1. Пусть известно, что на отрезке аппроксимации функция $s(t)$ является квадратичной параболой

$$s(t) = a_1 t + a_2 t^2, \tag{14}$$

которая интерполируется прямой

$$\varphi(t, t_1) = \frac{s(t_1)}{t_1} t.$$

Максимальная погрешность интерполяции $\varepsilon_m(t_1)$ равна

$$\varepsilon_m(t_1) = \left|\frac{a_2 t_1^2}{4}\right|.$$

Потребуем, чтобы для сигнала (14) $\varepsilon_m(t_1)$ оценивалась точно, т. е. чтобы

$$y(t_1) = \frac{a_2 t_1^2}{4}.$$

Для преобразования сигнала $s(t)$ будем использовать интегральные операторы A вида

$$A[t_1, s(t)] = \int_0^{t_1} t^r s(t)\, dt, \tag{15}$$

где r — произвольный коэффициент; $r > -1$.

Структурную модель F представим линейной комбинацией сигнала и преобразования $A[t_1, s(t)]$:

$$y(t_1) = F[t_1, s(t)] = s(t_1) + kA[t_1, s(t)],$$

где k — неизвестный коэффициент.

$$y(t_1) = s(t_1) + k\int_0^{t_1} t^r s(t)\, dt. \tag{16}$$

Составим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y(t_1) = 0, \text{ если } s(t) = a_1 t; \\ y(t_1) = \frac{a_2 t_1^2}{4}, \text{ если } s(t) = a_2 t^2, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} y(t_1) = a_1 t_1 + k \int\limits_0^{t_1} t^r a_1 t dt; \\ y(t_1) = a_2 t_1^2 + k \int\limits_0^{t_1} t^r a_2 t^2 dt. \end{cases}$$

Решив ее, определим: $r=1$, $k=-3/t_1^2$; подставив r и k в (16), получим

$$y(t_1) = s(t_1) - \frac{3}{t_1^2} \int\limits_0^{t_1} ts(t)\, dt.$$

Пример 2. Рассмотрим способ определения параметров структурной модели на основе требования точности оценки максимальной погрешности. Как и в первом примере, будем использовать интегральные преобразования типа (15). Структурную модель представим следующей комбинацией:

$$y(t_1) = F[t_1, s(t)] = s(t_1) + k_1 \int\limits_0^{t_1} t^l s(t)\, dt + k_2 \int\limits_0^{t_1} t^r s(t)\, dt, \tag{17}$$

где k_1, k_2, r, l — неизвестные коэффициенты; для определенности примем $r>l$. Для того чтобы выполнялось $y(t_1)=0$ при $s(t)=a_1 t$ (для простоты полагаем $s(0)=0$), очевидно необходимо, чтобы k_1 и k_2 были пропорциональны соответственно t_1^{-l-1} и t_1^{-r-1}. Поэтому k_1 и k_2 будем искать в следующем виде:

$$k_1 = \frac{\alpha}{t_1^{l+1}}; \quad k_2 = \frac{\beta}{t_1^{r+1}}, \tag{18}$$

где α, β — постоянные коэффициенты. Тогда условие (17) представится следующим образом:

$$y(t_1) = a_1 t_1 + \frac{\alpha a_1}{t_1^{l+1}} \int\limits_0^{t_1} t^{l+1} dt + \frac{\beta a_1}{t_1^{r+1}} \int\limits_0^{t_1} t^{r+1} dt = 0. \tag{19}$$

После интегрирования и деления на $a_1 t_1$ получим

$$1 + \frac{\alpha}{l+2} + \frac{\beta}{r+2} = 0$$

или

$$\beta = -r - 2 - \alpha \frac{r+2}{l+2}. \tag{20}$$

Запишем выражение для погрешности линейной интерполяции на отрезке $[0, T]$:

$$\varepsilon(t, T) = s(t) - \frac{s(T)}{T} t. \tag{21}$$

получим

$$y(t_1) = \varepsilon(t_1, T) + \frac{\alpha}{t_1^{l+1}} \int_0^{t_1} t^l \varepsilon(t, T)\, dt + \frac{\beta}{t_1^{r+1}} \int_0^{t_1} t^r \varepsilon(t, T)\, dt. \tag{22}$$

Оценим модуль $y(T)$ для случая $|\alpha| > |\beta|$ или при одинаковых знаках α и β, заметив, что $\varepsilon(T, T) = 0$:

$$|y(T)| = \left| \frac{\alpha}{T^{l+1}} \int_0^T t^l \varepsilon(t, T)\, dt + \frac{\beta}{T^{r+1}} \int_0^T t^r \varepsilon(t, T)\, dt \right| = \left| \frac{1}{T^{l+1}} \int_0^T \gamma(t)\, \varepsilon(t, T) dt \right|,$$

где
$$\gamma(t) = \left[\alpha + \beta \left(\frac{t}{T} \right)^{r-l} \right] t^l.$$

Так как при указанных ограничениях функция $\gamma(t)$ не меняет знак на интервале $[0, T]$, то на основании обобщенной теоремы о среднем можно утверждать, что

$$\int_0^T \gamma(t)\, \varepsilon(t, T)\, dt = \varepsilon(\xi, T) \int_0^T \gamma(t)\, dt,$$

где ξ — точка внутри интервала $[0, T]$. Таким образом,

$$|y(T)| = \left| \frac{\varepsilon(\xi, T)}{T^{l+1}} \int_0^T \gamma(t)\, dt \right|,$$

т. е. учитывая, что $|y(T)| = \delta_0$, после вычисления интеграла находим

$$\delta_0 = \left| \varepsilon(\xi, T) \left(\frac{\alpha}{l+1} + \frac{\beta}{r+1} \right) \right| \leqslant \left| \frac{\alpha}{l+1} + \frac{\beta}{r+1} \right| \varepsilon_m(T). \tag{23}$$

Далее, умножим обе части (22) на t_1^{l+1} и продифференцируем полученное выражение по t_1:

$$y'(t_1)\, t_1^{l+1} + (l+1)\, y(t_1)\, t_1^l = \varepsilon'(t_1, T)\, t_1^{l+1} + (l+1)\, \varepsilon(t_1, T)\, t_1^l +$$
$$+ \alpha t_1^l\, \varepsilon(t_1, T) + \frac{\beta(l-r)}{t_1^{r+1-l}} \int_0^{t_1} t^r \varepsilon(t, T)\, dt + \beta t_1^l\, \varepsilon(t_1, T). \tag{24}$$

Умножим (24) на t_1^{r+1-l} и еще раз продифференцируем по t_1. В результате

$$y''(t_1) + \frac{C}{t_1} y'(t_1) + \frac{D}{t_1^2} y(t_1) = \varepsilon''(t_1, T) + \frac{A}{t_1} \varepsilon'(t_1, T) + \frac{B}{t_1^2} \varepsilon(t_1, T), \tag{25}$$

где $A = l + r + \alpha + \beta + 3$; $B = (l + \alpha + \beta + 1)(r + l) + (l - r)\beta$; $C = r + l + 3$; $D = (l+1)(r+1)$.

Заменой переменной $t_1 = Te^{-z}$ $(0 < t_1 \leqslant T;\ \ 0 \leqslant z < \infty)$ уравнение (25) сводится к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + (1 - C) \frac{dy(z)}{dz} + Dy(z) = \frac{d^2 \varepsilon(z)}{dz^2} + (1 - A) \frac{d\varepsilon(z)}{dz} + B\varepsilon(z).$$

Решив его относительно $\varepsilon(z)$, получим

$$\varepsilon(z) = y(z) - e^{-z} y(0) + N_2 e^{-z} \int_0^z y(z_1) e^{z_1} dz_1 +$$

$$+ N_1 e^{Az} \int_z^\infty y(z_1) e^{-Az_1} dz_1 + N_1 \int_0^\infty y(z_1) e^{-Az_1} dz_1,$$

где z_1 — переменная интегрирования;

$$N_1 = \frac{(A-C)A + A + D}{A+1}; \quad N_2 = -\frac{C+D}{A+1}.$$

Оценивая модуль $\varepsilon(z)$ по максимуму, получим

$$\sup_{0 \leqslant z < \infty} |\varepsilon(z)| \leqslant \sup_{0 \leqslant z < \infty} |y(z)| \left| 2 + \frac{(l+1)(r+1)}{l+r+\alpha+\beta+3} \right|.$$

Учитывая, что

$$\sup_{0 \leqslant z < \infty} |\varepsilon(z)| = \varepsilon_m(T), \text{ а } \sup_{0 \leqslant z < \infty} |y(z)| = \delta_0,$$

найдем

$$\varepsilon_m(T) \leqslant \delta_0 \left| 2 + \frac{(l+1)(r+1)}{l+r+\alpha+\beta+3} \right|.$$

Таким образом, с учетом (23) находим, что $\varepsilon_m(T)$ заключена в следующих пределах:

$$\frac{\delta_0}{\left| \frac{\alpha}{l+1} + \frac{\beta}{r+1} \right|} \leqslant \varepsilon_m(T) \leqslant \delta_0 \left| 2 + \frac{(l+1)(r+1)}{l+r+\alpha+\beta+3} \right|.$$

Выбрав

$$\delta_0 = \frac{\varepsilon_0}{\left| 2 + \frac{(l+1)(r+1)}{l+r+\alpha+\beta+3} \right|},$$

будем иметь

$$\frac{\varepsilon_0}{\left| \frac{\alpha}{l+1} + \frac{\beta}{r+1} \right| \left| 2 + \frac{(l+1)(r+1)}{l+r+\alpha+\beta+3} \right|} \leqslant \varepsilon_m(T) \leqslant \varepsilon_0.$$

Чтобы интервал возможных значений $\varepsilon_m(T)$ был у́же, необходимо, чтобы величина

$$\psi = \left| \frac{\alpha}{l+1} + \frac{\beta}{r+1} \right| \left| 2 + \frac{(l+1)(r+1)}{l+r+\alpha+\beta+3} \right|$$

была минимальной.

Пользуясь обычными методами анализа, определим значение α, при котором достигается минимум ψ:

$$\alpha = \frac{(l+1)(l+2)}{2(r-l)} \left[2 - \sqrt{2}\,(r+1) \right].$$

Значение β находим из соотношения (20). Оказывается, что для выбранных таким образом α и β, с учетом всех принятых ограничений, значение ψ не зависит от r и l, т. е. выбор r и l может быть подчинен другим соображениям, например простоте реализации.

Таким образом, выбрав r, l, вычислив α и β, получим значения

k_1 и k_2; подставив их в (17), найдем окончательное выражение для структурной модели.

Заключение. Используя структурные модели сигналов, возможно разработать практические методы синтеза алгоритмов оценки погрешности аппроксимации. Представляется целесообразным дальнейшее развитие этих методов на основе применения нелинейных структурных моделей и различных весовых функций, заданных на интервале аппроксимации при преобразовании ошибки аппроксимации. Кроме того, интересно использование структурных моделей при разработке алгоритмов сжатия многомерных сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Фридрих. К теории дискретных отсчетов.— Труды МЭИ, вып. 52. М., 1963.
2. Т. В. Донецкая. Методы построения устройств адаптивной временной дискретизации для случая воспроизведения измеряемой величины по дискретным результатам измерений способом линейной интерполяции.— Измерительная техника, 1967, № 4.
3. В. А. Виттих. Адаптивная дискретизация измеряемой величины с использованием метода наименьших квадратов.— Автометрия, 1969, № 4.
4. А. М. Заездный, Е. И. Плоткин, Ю. А. Черкасский. Основы разделения и измерения сигналов по структурным свойствам, ч. 1. Л., ЛЭИС им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, 1971.

Поступила в редакцию
3 сентября 1971 г.,
окончательный вариант —
10 ноября 1971 г.