

А. М. ОСТАПЕНКО

(Новосибирск)

### АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОТСЧЕТА КООРДИНАТ В СИСТЕМЕ С ОПТИЧЕСКИМИ РЕШЕТКАМИ

Автоматические устройства кодирования и ввода в ЭВМ координат изображений, в которых в качестве сканирующего узла используется электроннолучевая трубка (ЭЛТ) высокого разрешения, в настоящее время представляются наиболее перспективными. Критерии, по которым следует оценивать подобные устройства, необходимо дифференцировать в зависимости от решаемых ими задач. Так, для некоторого семейства изображений, объединенных общими признаками (например, снимки искровых и пузырьковых камер ускорителей и фотографии, получаемые при исследовании сверхслабого свечения), требуется высокая точность кодирования изображения и малое время, необходимое на ввод ЭВМ и дальнейшую обработку. Эффективность работы системы, т. е. те качественно новые возможности, которые позволяют в ходе эксперимента получать достоверные результаты, определяется принципом, положенным в основу устройства, его простотой и надежностью.

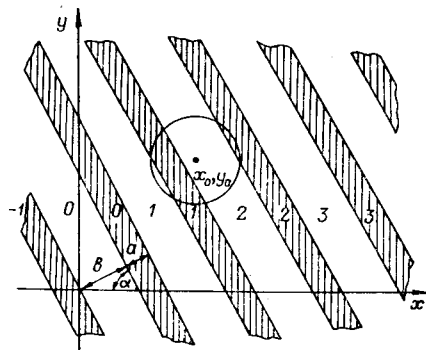


Рис. 1.

В приборах [1—3] требуемая точность достигается применением специальных координат решеток, по которым сканирующий луч ЭЛТ движется одновременно с перемещением по изображению. В общем случае решетка представляет собой наклоненные под углом  $\alpha$  к оси  $x$  линии, нанесенные на подложке с коэффициентом пропускания  $\eta(x, y)$ . Коэффициент прозрачности самой линии обозначим через  $\mu(x, y)$ . Ширина линии равна  $a$ , расстояние между ними  $b$  (рис. 1). Световой поток, прошедший через такую решетку, определяется интегралом

$$I(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x, y) f(x, x_0, y, y_0) dx dy, \quad (1)$$

где  $r(x, y)$  — функция, описывающая коэффициент пропускания решетки;  $f(x, x_0, y, y_0)$  — распределение яркости пятна ЭЛТ. Известно, что закон распределения яркости светового пятна ЭЛТ близок к нормальному [4]:

$$f(x, x_0, y, y_0) = \frac{1}{2\pi r_0^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2r_0^2}}, \quad (2)$$

где  $x_0, y_0$  — координаты центра пятна;  $r_0$  — параметр закона. Вид функции  $r(x, y)$  можно найти, если предположить, что решетка определена везде в прямоугольной системе координат с центром на границе линии. Если обозначить нулевой пару линий с коэффициентами пропускания  $\eta(x, y)$  и  $\mu(x, y)$ , ближайшую к началу координат, следующую первой и т. д., то значение функции  $r(x, y)$  будет равно  $\eta(x, y)$  в областях, ограниченных  $n$  и  $n+1$  линиями с коэффициентом пропускания  $\mu(x, y)$ . Функция  $r(x, y)$  принимает значение  $\mu(x, y)$  на участках с границами  $n$  и  $n+1$  линий с коэффициентом пропускания  $\eta(x, y)$ :

$$r(x, y) = \begin{cases} \eta(x, y), & \text{если } n(a+b) \leq x \sin \alpha + y \cos \alpha \leq na + (n+1)b, \\ -\infty \leq x \leq \infty; \\ \mu(x, y), & \text{если } na + (n+1)b \leq x \sin \alpha + y \cos \alpha \leq (n+1)(a+b), \\ -\infty \leq x \leq \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Для случая, когда функции  $\eta(x, y)$  и  $\mu(x, y)$  постоянны во всей области определения решетки, т. е. не зависят от координат

$$\eta(x, y) = \eta_0, \mu(x, y) = \mu_0,$$

значение  $I(x_0, y_0)$  будет равно сумме интегралов, которые соответствуют световым потокам, прошедшим через каждую линию. Таким образом, вычисление (1) с учетом (2) и (3) приводит к результату:

$$I(x_0, y_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (\eta_0 - \mu_0) \Phi \left[ \frac{n(a+b) + b - x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha}{r_0} \right] - \eta_0 \Phi \left[ \frac{n(a+b) - x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha}{r_0} \right] + \mu_0 \Phi \left[ \frac{(n+1)(a+b) - x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha}{r_0} \right] \right\}, \quad (4)$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  — интеграл вероятности. Не нарушая общности анализа, можно предположить, что световой луч движется по одной из координатных осей, например  $x(y=0)$ . Тогда, если  $\eta_0=1, \mu_0=0$ , т. е. абсолютно непрозрачные линии решетки нанесены на прозрачную подложку, получим выражение, определяющее изменение прошедшего через решетку светового потока в зависимости от координаты  $x$ :

$$I(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \Phi \left( \frac{n+b - \{x \sin \alpha\}}{r} \right) - \Phi \left( \frac{n - \{x \sin \alpha\}}{r} \right) \right]. \quad (5)$$

Скобками  $\{ \}$  обозначена дробная часть выражения  $x \sin \alpha$ . Здесь и далее значения всех параметров приведены в относительных единицах. Условием нормировки является  $a+b=1$ . При переходе к абсолют-

ным единицам значения параметров необходимо умножить на размерную величину  $a+b$ , например:  $r_0=r(a+b)$ .

Ряд (5) может быть ограничен тремя членами  $-1 \leq n \leq 1$ , если предположить, что  $r \leq 1$ . Кривая распределения яркости пятна в этом случае лежит в основном в пределах трех линий, ближайших к центру пятна. На рис. 2 представлены графики функции (5) при различных значениях  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $r$ .

Соотношение (5) для некоторых  $a$ ,  $b$ ,  $r$  можно аппроксимировать синусоидальной зависимостью

$$I^*(x) = A + B \sin \omega x,$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные коэффициенты при заданных параметрах решетки и радиуса пятна.

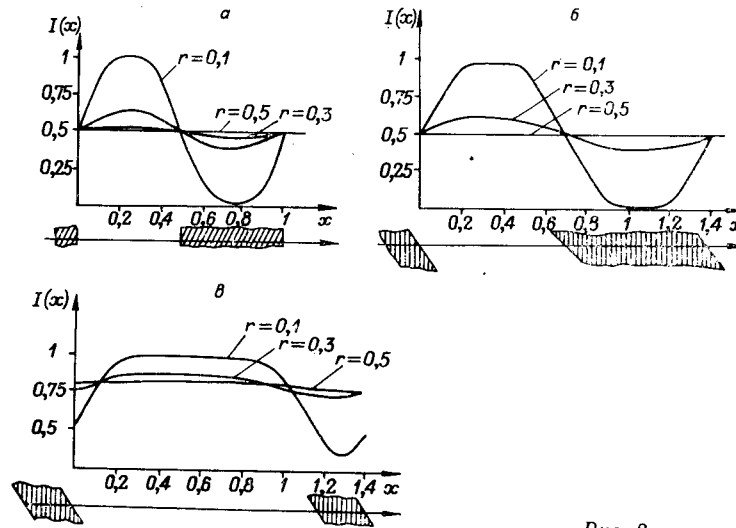


Рис. 2.

Поскольку функция (5) периодическая с периодом  $1/\sin \alpha$ , то  $\omega = 2\pi \sin \alpha$ . Учитывая, что при  $a=b$  среднее значение  $I(x)$  равно 0,5, а максимальное значение  $I(x)$  достигается в точке с координатой  $x = 0,25/\sin \alpha$ , можно найти коэффициенты  $A$  и  $B$ . Если ограничить диапазон изменения  $r$  ( $0,2 \leq r \leq 0,5$ ), тогда

$$I^*(x) = \frac{1}{2} + \left[ 2\Phi\left(\frac{1}{4r}\right) - \frac{3}{2} \right] \sin(2\pi \sin \alpha x). \quad (6)$$

Сравнение (5) и (6) при названных ограничениях дает близкие результаты.

Выражение (5) позволяет подсчитать коэффициент глубины модуляции светового потока решеткой

$$m = \frac{I_{\max}(x_1) - I_{\min}(x_2)}{I_0},$$

где  $I_{\max}(x_1)$ ,  $I_{\min}(x_2)$  — максимально и минимально возможное значение светового потока, прошедшего через решетку;  $I_0$  — падающий на решетку световой поток.

Коэффициент  $m$  определяет приращение светового потока, прошедшего через решетку при перемещении пятна от середины прозрачной до середины непрозрачной линий. Поскольку  $I(x)$  нормировано так,

что  $I_0=1$ , а значения  $I_{\max}(x_1)$  и  $I_{\min}(x_2)$  достигаются в точках с координатами

$$x_1 = \frac{b}{2 \sin \alpha} \text{ и } x_2 = \frac{1+b}{2 \sin \alpha},$$

то

$$m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \Phi\left(\frac{2n+b}{2r}\right) - \Phi\left(\frac{2n-b}{2r}\right) - \Phi\left(\frac{2n+b-1}{2r}\right) + \Phi\left(\frac{2n-b-1}{2r}\right) \right]. \quad (7)$$

Коэффициент глубины модуляции не зависит от угла наклона траектории движения пятна относительно линий решетки и его значением можно пользоваться при определении диаметра пятна ЭЛТ, поскольку измерение коэффициента  $m$  довольно просто произвести с достаточной точностью. Подобные измерения можно выполнять для решеток с любыми параметрами  $a$  и  $b$ , но наиболее удобно в случае  $a=b$ . Тогда

$$m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \Phi\left(\frac{4n+1}{4r}\right) - 2\Phi\left(\frac{4n-1}{4r}\right) + \Phi\left(\frac{4n-3}{4r}\right) \right]. \quad (8)$$

Это выражение справедливо для любых  $r$  и является обобщением полученного в [5] результата для  $r \leq 0,25$ .

Согласно (8), при диаметре пятна 30 мкм коэффициент глубины модуляции равен 0,8, а ширина линий составляет 50 мкм. Рассмотрим условия, при которых возможно получить дискретность отсчета координат менее, чем ширина линий, полагая, что основной причиной погрешности являются помехи, воздействующие на сигнал в координатных каналах системы. Предположим, что сигнал фотоэлектрического узла можно представить в виде

$$u(x) = u_p(x) + u_{ш}(x),$$

где  $u_p(x)$  определяется выражением (5);  $u_{ш}(x)$  — случайная составляющая, содержащая шумы приемника светового потока — фотоэлектронного умножителя и шумы, вызванные неоднородностями люминофора ЭЛТ.

Сигнал  $u(x)$  поступает на схему, которая срабатывает при пересечении им порога  $U_0$ . Момент пересечения определяет значение координаты. Воздействие помех приведет к случайному изменению момента срабатывания, т. е. значение координаты будет отличаться от действительной на величину  $\Delta = x_{ср} - x_0$ , где  $x_0$  и  $x_{ср}$  — координаты границы линии решетки и момента срабатывания пороговой схемы.

В случае, когда помехи  $u_{ш}(x)$  малы, по сравнению с сигналом, и скорость их изменения меньше, чем крутизна сигнала, среднеквадратическое значение  $\sigma_{\Delta}$  смещения момента пересечения сигналом порога пропорционально среднеквадратичному значению шума  $\sigma_{ш}$  и обратно пропорционально крутизне сигнала в окрестности порогового уровня  $u_0$  [6]:

$$\sigma_{\Delta} = \frac{\sigma_{ш}}{u_x(x_0)}.$$

Уровень  $u_0$ , при котором будет наименьшей случайная ошибка, можно определить, зная координату  $x_0$  — точку, где достигается наибольшая крутизна сигнала. Аналитическое решение этой задачи затруднено отысканием корней трансцендентного уравнения  $u''_{xx}(x_0) = 0$ , которое

имеет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ (n-a-x_0 \sin \alpha) e^{-\frac{(n-a-x_0 \sin \alpha)^2}{2r^2}} - (n-b+x_0 \sin \alpha) \times \right. \\ \left. \times e^{-\frac{(n-b+x_0 \sin \alpha)^2}{2r^2}} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-x_0 \sin \alpha) e^{-\frac{(k-x_0 \sin \alpha)^2}{2r^2}}. \quad (9)$$

Однако для случая  $a=b$  уравнение (9) имеет решение

$$x_0 = l \frac{a}{2 \sin \alpha}; \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty,$$

т. е. минимальная случайная ошибка получается при установке порога, соответствующего границе линии. Согласно (5),

$$u_0 = \frac{u_{\max}}{2}.$$

При решении (9) с произвольными  $a$  и  $b$  значение  $x_0$  не будет совпадать с координатами границ линий, и в этом случае можно ввести понятие систематической ошибки, определив ее как разницу между  $x_0$  и координатой границы линии  $x_r$ :

$$\delta = x_0 - x_r.$$

Если  $a > b$ , т. е. ширина непрозрачной линии больше прозрачного промежутка, то  $\delta < 0$ , или пороговая схема сработала раньше, чем центр пятна достиг границы непрозрачной линии. Если  $a < b$ , то  $\delta > 0$ , отсчет произведен за границей линии. Однако наличие систематической ошибки, полученной из критерия минимума случайной, не отразится на точности отсчета координат, поскольку можно считать, что непрозрачная (или прозрачная) линия шире, а отсчет произведен на границе линии.

Соотношение, определяющее минимальную величину случайной ошибки при отсчете координат, имеет вид

$$\sigma_{\Delta} = \frac{\sqrt{\pi} r}{\sqrt{q} \sin \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ e^{-\frac{(n-x_0 \sin \alpha)^2}{2r^2}} - e^{-\frac{(n+b-x_0 \sin \alpha)^2}{2r^2}} \right]}, \quad (10)$$

где  $q = \frac{u_{\max}^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}$  — отношение сигнал/помеха в канале фотоэлектрического узла. В случае  $a=b$  и  $r \leq a/2$  выражение для среднеквадратичного значения случайного смещения момента срабатывания упрощается:

$$\sigma_{\Delta} = \frac{\sqrt{\pi} r}{\sqrt{q} \sin \alpha \left( 1 - e^{-\frac{1}{8r^2}} \right)}. \quad (11)$$

Воздействие шумов приводит к появлению случайной ошибки, величина которой уменьшается с ростом отношения сигнал/помеха и в известных приближениях пропорциональна диаметру пятна  $d_{\text{п}} = 2r$ . Так, на рис. 3 приведены зависимости  $\sigma_{\Delta}$  от диаметра пятна, рассчитанные по формуле (11). Например, абсолютное значение  $\sigma_{\Delta}$  для решетки с шагом 100 мкм при  $q=60$ ,  $\alpha=90^\circ$  и  $d_{\text{п}}=30$  мкм составляет 4 мкм. Некоторое возрастание  $\sigma_{\Delta}$  можно заметить при  $d_r = 0,4 \div 0,5$ .

Использование для отсчета координат системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) [5] позволяет уменьшить случайную ошибку. Для оценки фильтрующей способности системы ФАПЧ при воздействии малых помех в [7] введено понятие коэффициента фильтрации фазы как отношение дисперсий фаз подстраиваемого генератора  $\sigma_r^2$  и входного сигнала системы  $\sigma_\Delta^2$

$$S_\varphi = \sigma_r^2 / \sigma_\Delta^2. \quad (12)$$

Предположим, что на вход системы ФАПЧ поступает ограниченный по амплитуде гармонический сигнал фотоэлектрического узла, детерминированная составляющая которого определена выражением (6). Кроме того, частотная характеристика схемы, предшествующей системе ФАПЧ, имеет колоколообразную форму, и отношение сигнал/помеха на входе велико. Тогда, как можно показать [7], коэффициент фильтрации фазы может быть меньше единицы, если в качестве фильтра в цепи обратной связи ФАПЧ применен пропорционально интегрирующий фильтр. Использование в системе ФАПЧ обычного интегрирующего фильтра или *RLC*-фильтра дает худшие результаты.

Если учесть, что постоянная времени переходного процесса в системе ФАПЧ должна быть примерно равной времени, характерному для медленных изменений частоты сигнала фотоэлектрического узла, то для схемы ФАПЧ, описанной в [5], коэффициент фильтрации составит 0,2. Отсюда следует, что дисперсия отклонения момента отсчета координат с помощью системы ФАПЧ может быть уменьшена в 5 раз.

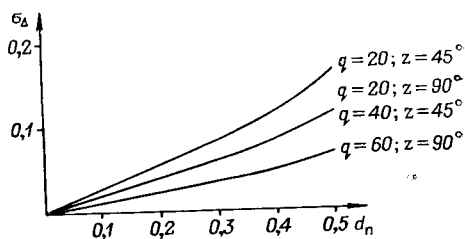


Рис. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Борисовский, А. С. Буров и др. Сканирующий автомат на электронно-лучевой трубке. Препринт ОИЯИ, Р-10-3631. Дубна, 1967.
2. С. Т. Васьков, Л. С. Вертопрахова и др. Сканирующий автомат для ввода в ЭЦВМ फिल्मовой информации.— *Автометрия*, 1970, № 2.
3. Автоматическая обработка графической информации с применением универсальных ЭВМ.— ТС-2 «Средства вычислительной техники и оргтехники», вып. 2. М., ЦНИИИТЭИ ПСА и СУ, 1971.
4. В. А. Миллер, Л. А. Куракин. Приемные электроннолучевые трубки. М., «Энергия», 1964.
5. С. Т. Васьков, А. М. Остапенко. Повышение точности кодирования координат с помощью подстраиваемого интерполяционного генератора.— *Автометрия*, 1971, № 2.
6. В. В. Тихонов. Статистическая радиотехника. М., «Советское радио», 1966.
7. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин. Фазовая автоподстройка частоты. М., «Связь», 1966.

Поступила в редакцию  
10 ноября 1971 г.