АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 2 1972

УДК 621.317.7.085.36 : 621.317.7.088

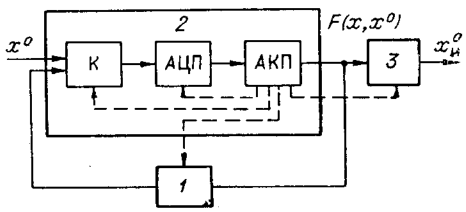
В. П. ПОПОВ

(Баку)

О ТОЧНОСТИ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ С АВТОМАТИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИЕЙ ПОГРЕШНОСТИ

Вопрос о повышении точности измерительных приборов продолжает оставаться актуальным и важным вопросом измерительной техники. Это, в частности, относится и к цифровым измерительным приборам, получившим широкое распространение. Весьма перспективными являются методы автоматической коррекции погрешности (АКП), отличительная черта которых заключается в том, что производится не одно, а несколько измерений и по определенному алгоритму уточняется результат измерения. В [1, 2] даны два возможных и эффективных метода автоматической коррекции погрешности: интегрирующе-потенциометрический метод [1] и итерационный алгоритм автоматической коррекции погрешности [2]. Большой теоретический интерес представляет последняя работа, однако в ней не рассматривается влияние дискретности представления измеряемой аналоговой величины на окончательный результат измерения, что привело авторов к неверной оценке предельной, полностью устраняемой данным алгоритмом «мультипликативной погрешности основной измерительной цепи».

Настоящая работа посвящена анализу метода автоматической коррекции систематической погрешности, который является обобщением и дальнейшим развитием двух названных методов. Анализируется так же влияние дискретности представления аналоговой величины на окончательный результат измерения с применением данного метода АКП, который, следуя авторам (2), назовем итерационным.



Структурная схема цифрового измерения аналоговой величины с применением итерационного метода АКП:

блок К осуществляет подачу аналоговой величины на вход аналого-цифрового преобразователя (АЦП) (погрешность блока учитывается функцией f); блок АЦП является первичным измерительным прибором (описывается функцией f); блок АКП реализует алгоритм, управляет работой всех остальных блоков (команды показаны штриховой линией); блок *1* производит цифро-аналоговое преобразование выходной величины блока *2* (описывается функцией Ψ); *3* — блок индикации окончательного результата измерения.

Итерационный метод автоматической коррекции погрешности позволяет значительно уменьшить (а в некоторых случаях полностью исключить) влияние нестабильности параметров элементов основной измерительной цепи на точность измерения и устранить любую монотонную нелинейность первичного преобразователя, что дает возможность использовать такой прибор продолжительное время без калибровки и подстройки в различных условиях окружающей среды.

Структурная схема цифрового измерения аналоговой величины с применением итерационного метода АКП приведена на рисунке. Процесс измерения можно представить как решение уравнения

$$x=F(x,\ x^\circ) \qquad (1)$$

методом последовательных приближений, причем за первое приближение принимается первый грубый результат измерения $f(x^0)$ аналоговой величины x° первичного аналого-цифрового преобразователя (АЦП). F — это оператор над результатами измерений первичным измерительным прибором аналоговой величины x° и некоторых других величин. Задача состоит в определении таких условий, при которых окончательный результат измерения цифрового прибора (им является неподвижная точка отображения F) будет удовлетворять нашим требованиям. $F(x,\ x^\circ)$ — ступенчатая функция от x, ее можно представить как квантование Φ некоторой дифференцируемой функции $\varphi\ (x,\ x^\circ)$, т. е.

$$F(x,\ x^\circ)\equiv\Phi\ [\varphi\ (x,\ x^\circ)];\quad \Phi\ (x)=x_i \quad \text{для всех} \quad x_i-\frac{h}{2}\leqslant x<x_i+\frac{h}{2}\ ;$$

здесь h — некоторая постоянная (шаг квантования) (см. также приложение).

Использование дифференцируемой функции φ вместо ступенчатой функции F позволяет упростить исследование прибора.

Если не учитывать ступенчатость функции F, то решение уравнения (1) методом последовательных приближений заменяется решением этим же методом уравнения

$$x=\varphi(x,\ x^\circ). \qquad (2)$$

Функция φ выбирается так, чтобы решение уравнения (2) было единственным. Укажем два возможных вида функции $\varphi\ (x,\ x^\circ)$, удовлетворяющих поставленной задаче:

$$f[x^\circ-\Psi\ (x)]-f(0)+x; \qquad (3')$$

$$f(x^\circ)-f[\Psi(x)]+x. \qquad (3'')$$

Здесь f — функция, описывающая первичный измерительный преобразователь; Ψ — функция, описывающая цифро-аналоговый преобразователь.

Покажем, как получается n-й результат измерения. В первом случае [см. (3′)] предыдущий (n—1)-й результат измерения преобразуется в блоке *1* в аналоговую величину и вычитается в блоке К из измеряемой величины x°, затем в блоке АЦП происходит аналого-цифровое преобразование полученной разности и результат его суммируется в блоке АКП с (n—1)-м результатом измерения. Во втором случае [см. (3″)] (n — 1)-й результат измерения преобразуется в блоке *1* в аналоговую величину, производится ее аналого-цифровое преобразование, результат которого вычитается из суммы первого и (n—1)-го результатов измерения. В обоих случаях за первый результат измерения принимается результат $f(x^\circ)$ прямого аналого-цифрового преобразования измеряемой величины.

Известно, что для сходимости итерации при решении уравнения (2) методом последовательных приближений к единственной точке достаточно выполнение почти везде условия

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\varphi\ (x,\ x^\circ)\right|\leqslant\alpha\ ;\qquad 0\leqslant\alpha=\text{const}<1. \qquad (4)$$

Однако для уравнения (1) это условие является лишь достаточным условием сходимости итерации, но не единственности предельной точки. Нетрудно показать справедливость следующих лемм, устанавливающих связь между точками сходимости итераций для уравнений (1)—(2) (см. приложение).

Лемма 1. Если $\varphi(x, x^\circ)$ — дифференцируемая по x функция и

$$0 \leqslant \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, x^\circ) \leqslant \alpha; \qquad 0 \leqslant \alpha = \mathrm{const} < 1,$$

то пределом последовательности $\{x_k\}$, образованной функцией $F(x_{k+1} = F(x_k, x^\circ))$ может быть любая точка множества

$$\{x_j\} = A\left(|\varphi(x_j, x^\circ) - x_j| < \frac{h}{2}\right); \quad A \subset \bar{F}.$$

Лемма 2. Если $\varphi(x, x^\circ)$ — дифференцируемая по x функция и

$$-\alpha \leqslant \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, x^\circ) \leqslant 0; \qquad 0 \leqslant \alpha = \mathrm{const} < 1,$$

то пределом последовательности $\{x_k\}$, образованной функцией F $(x_{k+1} = F(x_k, x^\circ))$, может быть любая «пара точек» множества

$$\{x_q\} = B\left(|\varphi[F(x_q, x^\circ), x^\circ] - x_q| < \frac{h}{2}\right); \qquad B \subset \bar{F},$$

т. е., начиная с некоторого номера q, последовательность будет иметь вид $\ldots x_q, x_{q+1}, x_q, x_{q+1}, \ldots \bar{F}$ — множество принимаемых функцией F значений.

Из лемм непосредственно следует оценка отклонения фактического результата измерения, которым может быть любая точка множества A или «пара точек» множества B, от истинной предельной точки x_c — точки сходимости итерации для уравнения (2). Если $\Psi(x) \equiv x$, $x_c = x^\circ$; в общем же случае $(\Psi(x) \not\equiv x)$ $x_c = \Psi^{-1}(x^\circ)$ (Ψ^{-1}— функция, обратная Ψ).

$$|x_j - x_c| < \frac{h}{2\left[1 - \frac{\partial}{\partial x}\varphi(\xi_j, x^\circ)\right]} \leqslant \frac{h}{2(1-\alpha)}; \tag{5}$$

$$|x_q - x_c| < \frac{h\left[1 + \frac{\partial}{\partial x}\varphi(\eta_q, x^\circ)\theta_q\right]}{2\left[1 - \frac{\partial}{\partial x}\varphi(\eta_q, x^\circ)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\xi_q, x^\circ)\right]} \leqslant \frac{h}{2(1-\alpha)}; \tag{6}$$

$$\xi_j \in [x_j, x_c], \quad \eta_q \in [F(x_q, x_c), x_c]; \quad \xi_q \in [x_q, x_c]; \quad -\frac{1}{2} \leqslant \theta_q \leqslant \frac{1}{2}.$$

Как следует из неравенств (5)—(6), отклонение результата измерения от истинного значения может быть произвольным в пределах, зависящих от производной функции φ по первому аргументу. При значении α, близком к 1, это отклонение может стать произвольно большим.

Далее рассмотрим влияние, которое оказывает вид функции $\Psi(x)$ на сходимость итерации (измерительного процесса). Обратимся вновь к выражениям (3′—3″). В обоих случаях $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, x^\circ) = 1 - \frac{\partial f}{\partial \Psi}\Psi_x$. Подставляя последнее соотношение в (4), получим достаточное условие сходимости измерительного процесса в общем случае

$$\frac{1-\alpha}{\Psi_x} \leqslant \frac{\partial f}{\partial \Psi} \leqslant \frac{1+\alpha}{\Psi_x}. \tag{7}$$

Как видно из (7), на функцию f, описывающую АЦП, накладываются более жесткие условия при $\Psi_x > 1$ и менее жесткие при $\Psi_x < 1$. Например, при $\partial f/\partial\Psi = 1{,}91$ и $\Psi_x = 1{,}05$ итерация может не сходиться, так как при этом $\left|\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, x^\circ)\right| > 1$. Однако если даже $\partial f/d\Psi = 2{,}2$, но $\Psi_x = 0{,}9$, то итерация будет сходиться.

Пусть δ_1 и δ_2 — соответственно нижний и верхний (с учетом знаков) пределы мультипликативной ошибки блока АЦП, т. е.

$$1 + \delta_1 \leqslant \frac{\partial f}{\partial\Psi} \leqslant 1 + \delta_2;$$

тогда для выполнения условий сходимости измерительного процесса (7) необходимо выполнение неравенств

$$\frac{1-\alpha}{1+\delta_1} \leqslant \Psi_x \leqslant \frac{1+\alpha}{1+\delta_2}. \qquad (8)$$

Из последнего условия следует

$$0 < \beta_{\min} \leqslant \Psi_x \leqslant \beta_{\max} < \frac{2}{1+\delta_2}$$

($\beta_{\min}$, $\beta_{\max}$ — некоторые постоянные) и

$$\alpha \geqslant \frac{\delta_2 - \delta_1}{2 + \delta_1 + \delta_2}. \qquad (9)$$

Оптимальным в смысле скорости сходимости, будет минимально возможное значение $\alpha < 1$

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2 + \delta_1 + \delta_2}. \qquad (10)$$

Подставив значение α_{opt} в (8), определим оптимальную величину Ψ_x: $\beta_{\text{opt}} = \frac{2}{2 + \delta_1 + \delta_2}$.

Пусть $\Psi_x = \beta \pm \Delta\beta \leqslant \beta_{\max}$. Как было отмечено, в общем случае неподвижной точкой (окончательным результатом измерения) будет точка $x_c = \Psi^{-1}(x^\circ)$. Так как блок *1* в общем случае обладает мультипликативной $\left(\pm\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)$ и аддитивной $\Psi(0)$ ошибками, то

$$x_c = \frac{x^\circ}{\beta}(1 \mp \delta\beta) - \frac{\psi(0)}{\beta}(1 \mp \delta\beta); \quad \delta\beta = \frac{\Delta\beta}{\beta + \Delta\beta}.$$

Теперь для получения результата измерения в прежних единицах нужно показание прибора умножить на величину β. Изменив «вес» кода результата измерения при индикации в β раз, получим $x_{\text{и}}^0 = x^\circ(1 \mp \delta\beta) - \Psi(0)(1 \mp \delta\beta)$. Таким образом, погрешность блока *1* полностью входит в окончательный результат измерения. Абсолютная методическая ошибка $\Delta_{\text{д}}$, определяемая неравенствами (5)—(6), в этом случае изменяется вместе с изменением «веса» кода также в β раз. В общем случае ($\beta \neq 1$) $\Delta_{\text{д}} < \frac{h}{2(1-\alpha)}\beta$. В неравенствах (5)—(6) $\alpha = \max\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|$; тогда

$$1 - \alpha = \begin{cases} \min(1 + \delta_1)\psi_x, & \text{если } \beta + \Delta\beta \leqslant \beta_{\text{opt}}; \\ 2 - \max(1 + \delta_2)\Psi_x, & \text{если } \beta_{\text{opt}} \leqslant \beta + \Delta\beta \leqslant \beta_{\max}, \end{cases}$$

и окончательно получаем для абсолютной методической ошибки оценку:

$$\Delta_{д} < \frac{h}{2(1+\delta_1)\left(1-\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)} \quad (\text{при } \Psi_x \leqslant \beta_{opt}); \tag{11'}$$

$$\Delta_{д} < \frac{h}{2\left[\frac{2}{\beta}-(1+\delta_2)\left(1+\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)\right]} \quad (\text{при } \beta_{opt} \leqslant \Psi_x \leqslant \beta_{max}). \tag{11}$$

Итак, если $\Psi_x \leqslant \beta + \Delta\beta \leqslant \beta_{opt}$, абсолютная ошибка не зависит от β и полностью определяется мультипликативной погрешностью блока АЦП; при $\Psi_x \leqslant \beta + \Delta\beta \geqslant \beta_{opt}$ она сильно зависит от β, причем незначительное увеличение β, которое приводит вообще к повышению быстродействия, резко увеличивает абсолютную ошибку. Так, например, если имеем мультипликативные ошибки АЦП $\delta_2 = -\delta_1 = 0{,}8$, тогда $\beta_{opt} = 1$; если выбранный блок ЦАП будет иметь $\beta = 1{,}1$ и мультипликативную ошибку до 1%, то $\Delta_д < 2700\,h$ (тогда как при $\beta \leqslant 1$ и той же мультипликативной ошибке $\Delta_д < 3h$).

Обратимся к формуле (10). Нетрудно заметить, что при любых

$$-1 < \delta_1 \leqslant 0 \text{ и } \delta_2 \geqslant 0 \tag{12}$$

$0 \leqslant \alpha_{opt} < 1$ Из этого следует, что имея достаточно стабильный цифро-аналоговый преобразователь, мы можем итерационным методом АКП устранить любую практически встречающуюся ошибку первичного измерительного преобразователя (блока АЦП). Например, при $\delta_1 = -0{,}8$ и $\delta_2 = 3$ (это соответственно — 80% и +300% только мультипликативной ошибки) $\alpha_{opt} = 0{,}905$, и, если выбранный по α_{opt} ЦАП будет обладать погрешностью не более 10%, то наш прибор будет допускать ошибку, складывающуюся из относительной ошибки цифро-аналогового преобразователя и абсолютной ошибки, не превосходящей по величине $3h$.

В заключение отметим, что (3′) и (3″) — это два самых простых вида функции φ, обеспечивающих при выполнении условия (7) сходимость измерительного процесса и единственность (ввиду монотонности f) предельной точки. Кроме того, прибор, реализующий функцию вида (3′), исключает также и случайную мультипликационную ошибку АЦП.

Приложение

I. Кроме рассмотренного способа квантования функции φ возможны еще два:

$$а)\ \Phi_а(x) = x_i \quad \text{для всех} \quad x_i \leqslant x < x_{i+1} = x_i + h;$$

$$б)\ \Phi_б(x) = x_i \quad \text{для всех} \quad x_i - h - x_{i-1} < x \leqslant x_i.$$

Нетрудно показать справедливость следующих утверждений.

1) Если $\varphi(x, x^\circ)$ — дифференцируемая по x функция и

$$0 \leqslant \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, x^\circ) \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha = \text{const} < 1, \quad f(x^\circ) > x_c,$$

где $f(x^\circ)$ — первое приближение, то пределом последовательности $\{x_k^а\}$, образованной функцией $F_а(x,x^\circ) \equiv \Phi_а[\varphi(x,x^\circ)]\left(x_{k+1}^а = F_а\left(x_k^а, x^\circ\right)\right)$, будет точка $\Phi_а(x_c)$, а пределом последовательности $\{x_k^б\}\left(x_{k+1}^б = F_б\left(x_k^б, x^\circ\right)\right)$, образованной функцией $F_б(x,x^\circ) \equiv \Phi_б[\varphi(x,x^\circ)]$, будет только любая точка

$$x_i \in M\ (0 \geqslant \varphi(x_i, x^\circ) - x_i > -h); \quad M \subset F \text{ и } |x_i - x_c| < \frac{h}{1-\alpha}.$$

2) Если $\varphi(x, x^\circ)$ — дифференцируемая по x функция и

$$0 \leqslant \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, x^\circ) \leqslant \alpha; \quad 0 \leqslant \alpha = \mathrm{const} < 1, \quad f(x^\circ) < x_c ,$$

то пределом последовательности $\{x_k^б\}$ будет точка $Ф_б(x_c)$, а пределом последовательности $\{x_k^а\}$ будет только любая точка

$$x_i \in Q\,(0 \leqslant \varphi(x_i, x^\circ) - x_i < h); \quad Q \subset F \text{ и } |x_i - x_c| < \frac{h}{1-\alpha}.$$

3) Если $\varphi(x, x^\circ)$ — дифференцируемая по x функция и

$$-\alpha \leqslant \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, x^\circ) \leqslant 0; \quad 0 \leqslant \alpha = \mathrm{const} < 1,$$

то пределом последовательностей $\{x_k^а\}$ и $\{x_k^б\}$ будут соответственно точки $Ф_а(x_c)$ и $Ф_б(x_c)$.

Доказательства всех трех утверждений и лемм проходят почти одинаково. В качестве примера проведем доказательство леммы 1. Все последовательности

$$x_1^m, x_2^m, \ldots, x_p^m; \quad x_{p+1}^m, \ldots; \quad x_{p+1}^m = \varphi(x_p^m, x)^\circ$$

будут монотонно сходиться к единственной точке x_c. Монотонная сходимость следует из очевидного равенства

$$x_{p+1}^m - x_p^m = \left(x_p^m - x_{p-1}^m\right)\frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\xi_p^m, x^0\right); \quad \xi_p^m \in \left[x_p^m, \quad x_{p-1}^m\right]$$

и условия леммы. Каждый член x_k последовательности $\{x_k\}$ принадлежит какой-либо последовательности $\{x_p^{m_k}\}$, образованной функцией $\varphi(x, x^\circ)$. Пусть $x_k = x_{p_k}^{m_k}$; тогда

$$x_{k+1} = Ф\,(x_{p_{k+1}}^{m_k}) = \begin{cases} x' \neq x_{p_k}^{m_k}, & \text{если } \left|x_{p_k+1}^{m_k} - x_{p_k}^{m_k}\right| > \frac{h}{2}; \\ x_{p_k}^{m_k} = x_k, & \text{если } \left|x_{p_k+1}^{m_k} - x_{p_k}^{m_k}\right| < \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Если x_i — первый член последовательности $\{x_k\}$, для которого выполняется неравенство $\left|x_{p_i+1}^{m_i} - x_{p_i}^{m_i}\right| = |\varphi(x_i, x^0) - x_i| < \frac{h}{2}$ $(x_i \ni A)$, то $x_i = F(x_i, x^0) = x_{i+1}$, и тогда, как нетрудно заметить, $x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots$, т. е. он является пределом этой последовательности, что и доказывает **лемму**.

Учитывая, что $\varphi(x_c, x^0) = x_c$, получим

$$|\varphi(x_i, x^0) - x_i| = |x_c - x_i|\left|1 - \frac{\partial}{\partial x}\varphi(\xi_i, x^0)\right| < \frac{h}{2},$$

откуда следует (5).

II. Для иллюстрации изложенного в основном тексте приведем пример. Блок АЦП ($h=0{,}001$) обладает предельными мультипликативными $\delta_1 = -0{,}8$; $\delta_2 = 1{,}5$ и аддитивной $f(0) = 1$ (в условных единицах) ошибками.

Выберем блок ЦАП с $\beta = 0{,}7$ ($\beta_{opt} \approx 0{,}7407$) и мультипликативной ошибкой до 1%. Так как $\Psi_x < \beta_{opt}$, то из (11′) получим, что абсолютная методическая ошибка $\Delta_д < 3h = 0{,}003$.

Рассмотрим три случая измерения аналоговой величины $x^\circ = 10$. Для простоты положим, что ЦАП работает с абсолютной точностью. Вычисления одинаковы для обоих видов [см. (3′) и (3″)] функции φ.

А. Блок АЦП допускает в течение всего времени измерения постоянные мультипликативную (+150%) и аддитивную [$f(0) = 1$] ошибки. Промежуточные результаты после каждого цикла коррекции будут равны:
$x_1 = f(x^\circ) = 26$; $x_2 = \varphi(x_1, x^\circ) = 5{,}5$; $x_3 = 20{,}875$;...
$x_{10} = 13{,}014$; $x_{11} = 15{,}640$;... $x_{20} = 14{,}101$; $x_{21} = 14{,}424$;...
$x_{30} = 14{,}276$; $x_{31} = 14{,}293$;... $x_{37} = 14{,}287$; $x_{38} = 14{,}285$;
$x_{39} = 14{,}286$; $x_{40} = 14{,}286$;...

Таким образом, точка $x_{39} = 14{,}286$ является неподвижной, и окончательный результат измерения составляет

$$\overset{\circ}{x}_и = x_{39}\,\beta = 10{,}0\,02.$$

Б. Блок АЦП допускает в течение всего времени измерения постоянные мультипликативную (—80%) и аддитивную $[f(0)=1]$ ошибки. В этом случае
$x_1=3$; $x_2=4{,}580$; $x_3=5{,}939$; ... $x_{10}=11{,}382$; ... $x_{20}=13{,}644$; ... $x_{30}=14{,}120$; ... $x_{40}=14{,}250$; ... $x_{50}=14{,}278$; $x_{51}=14{,}279$; $x_{52}=14{,}280$; $x_{53}=14{,}283$; $x_{54}=14{,}283$; ... Неподвижная точка $x_{53}=14{,}283$, окончательный результат измерения $\overset{\circ}{x}_{и}=x_{53}\,\beta=9{,}998$.

В. Блок АЦП работает без погрешности в течение всего времени измерения. Тогда
$x_1=10{,}000$; $x_2=13{,}000$; ... $x_5=14{,}251$; $x_6=14{,}275$;
$x_7=14{,}283$; $x_8=14{,}285$; $x_9=14{,}285$;...

В этом случае окончательный результат измерения $\overset{\circ}{x}_{и}=x_8\beta=9{,}999$.

Итак, во всех рассмотренных случаях окончательный результат измерения отличается от истинного на величину, не превосходящую 0,002.

ВЫВОДЫ

Итерационный метод автоматической коррекции систематической погрешности позволяет полностью устранить любую практически встречающуюся систематическую погрешность [см. (12)], связанную с аналого-цифровым преобразованием измеряемой аналоговой величины, но при этом вносит методическую ошибку, определяемую произведением $\Psi_x \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,x^\circ)$.

Итерационный метод автоматической коррекции систематической погрешности позволяет также устранить случайную мультипликативную погрешность аналого-цифрового преобразователя (3′).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Дж. Кэй. Правильный выбор цифрового вольтметра.— Электроника (перевод с англ.), 1966, т. 39, № 7.
2. Т. М. Алиев, Л. Р. Сейдель, А. А. Тер-Хачатуров. Способ повышения точности цифрового измерения аналоговой величины.— Автометрия, 1969, № 5.

Поступила в редакцию
20 апреля 1971 г.