А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 2 1972

УДК 621.317.761

А. М. МИШИН
(Астрахань)

ЦИФРОВОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ КАК ФИЛЬТР

Цифровые методы измерения мгновенной частоты частотно-модулированных колебаний нашли широкое применение в современной технике высокоточных измерений. Анализу схемных решений и инструментальных погрешностей измерителей, реализующих эти методы, посвящено значительное число известных работ (например, [1—3]).

Однако чем точнее производится измерение какой-либо физической величины, тем сильнее влияние различного рода помех на результат. В связи с этим все большую актуальность приобретает проблема оценки повышения помехоустойчивости процесса измерения. Несмотря на то, что вопросы помехоустойчивости цифровых измерителей частоты рассматривались в [4, 5], селективные свойства этих устройств как дискретных систем исследованы недостаточно.

Уравнение цифрового измерителя. В цифровых измерителях частоты как измеряемая, так и образцовая частоты представляются в форме временных интервалов, сравнение которых позволяет получить число, характеризующее приращение фазы $\Delta\varphi$ измеряемого колебания на величину, кратную 2π. Для этого из непрерывного сигнала изменяющейся частоты

$$u(t) = U\cos\left(\int_0^t \omega(t)\,dt + \psi\right)$$

формируется последовательность узких импульсов (постоянной амплитуды) в моменты прохождения колебания через нуль с производной одного знака. Полученный так называемый фазовый сигнал $\varphi(pT_\omega)$, квантованный по уровню с шагом 2π, используется для формирования интервала измерения

$$T = \sum_{s=p-r}^{p} T_s.$$

Здесь $T_s = T_\omega = \frac{2\pi}{\omega}$ — текущий период колебания; p — целое число.

На рис. 1 показана упрощенная схема цифрового периодометра. Полезная информация на выходе устройства получается в виде числа,

$$N_p = \mathrm{ent}\left[\frac{rF_0}{F_{\text{ср}}}\right],$$

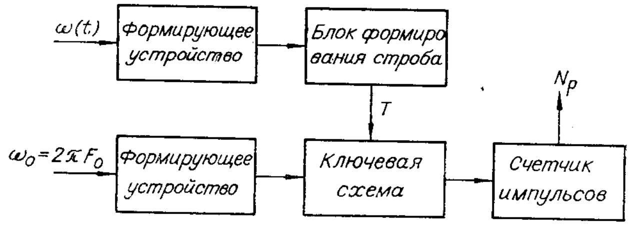

Рис. 1.

где r — коэффициент усреднения; F_0 — образцовая частота (частота счетной сетки); F_{cp} — среднее на интервале T значение измеряемой частоты; $\mathrm{ent}\,[x]$ — целая часть x; p — номер измерения (кадра).

В данном измерителе, реализующем фазовый метод измерения частоты [1], $r=\mathrm{const}$, а $T=T\,(r, T_\omega)$. При измерении частоты по методу счета нулей (цифровой частотомер) [3] $T=\mathrm{const}$, $r=r\,(T,\ T_\omega)$. Однако и в том и в другом случае для определения измеряемой частоты используется две величины: T и накопленное значение фазы $\Delta\varphi = 2\pi r$, связанные соотношением

$$\varphi\,(pT_\omega) - \varphi\,[(p-r)\,T_\omega] = 2\pi r$$

или в более удобной записи (r предполагается четным числом)

$$\varphi\left(pT_\omega + \frac{T}{2}\right) - \varphi\left(pT_\omega - \frac{T}{2}\right) = 2\pi r. \qquad (1)$$

На основании (1) для средней частоты на интервале T имеем

$$\overline{\omega}\,(pT_\omega) = \frac{1}{T}\left[\varphi\left(pT_\omega + \frac{T}{2}\right) - \varphi\left(pT_\omega - \frac{T}{2}\right)\right]. \qquad (2)$$

Интересно отметить, что полученное выражение при $r=1$ ($T=T_\omega$) переходит в известное соотношение, связывающее круговую частоту и период гармонического колебания $\omega = 2\pi/T_\omega$. Поэтому можно сказать, что цифровой измеритель реализует операцию численного дифференцирования фазы. Уравнение (2) является дискретным аналогом дифференциально-разностного уравнения вида

$$\alpha\,\frac{d}{dt}\,\varphi\,(t) = \frac{1}{T}\left[\varphi\left(t + \frac{T}{2}\right) - \varphi\left(t - \frac{T}{2}\right)\right],$$

которому соответствует интегральная форма, известная в теории случайных функций как оператор текущего сглаживания:

$$\overline{\omega}\,(t) = \alpha\omega\,(t) = \frac{1}{T}\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \omega\,(\tau)\,d\tau. \qquad (3)$$

Здесь $\omega\,(t) = \frac{d}{dt}\,\varphi\,(t)$, а α — некоторый коэффициент (собственное значение функционального оператора).

По аналогии уравнение (2) также может быть представлено в виде

$$\overline{\omega}\,(pT_\omega) = \frac{1}{r+1}\sum_{s=p-\frac{r}{2}}^{p+\frac{r}{2}} \omega\,(sT_\omega). \qquad (4)$$

Уравнения (2), (4) определяют искомую частоту в дискретные моменты времени $t = pT_\omega$. В действительности выборка результатов измерений производится с интервалом дискретности T_0 (на выходе измерителя получаем функцию $\overline{\omega}(nT_0)$; $n=0,1,2$).

В практике высокоточных измерений всегда выполняется условие $r \gg 1$, поэтому в (4) допустимо перейти к непрерывному времени t и сумму заменить интегралом, т. е. перейти к выражению (3). При этом цифровой измеритель частоты целесообразно идентифицировать условной схемой, состоящей из последовательно соединенных квазинепрерывного и дискретного элементов, первый из которых реализует функциональный оператор (3), а второй осуществляет выборку измеренных значений с равномерным шагом T_0.

Частотная характеристика интегратора. Под линейным преобразованием (3) можно подразумевать как чисто математическую операцию, так и адекватную этой операции реальную систему (интегратор).

Характеристики преобразования (3) как процедуры статистической обработки (в дискретном варианте) подробно исследованы в [6]. Однако успешное решение вопросов диагностики измерительных систем связано с анализом структуры выходных сигналов, и, с этой точки зрения, цифровой измеритель частоты целесообразно рассматривать как линейную избирательную систему.

Известно [7], что частотная характеристика устройства, реализующего оператор (3), имеет вид

$$K_{\text{и}}(\Omega) = \frac{2}{\Omega T} \sin \frac{\Omega T}{2}. \qquad (5)$$

Если помехи представлены полигармоническим процессом

$$u_{\text{п}}(t) = \sum_{i=1}^{k} U_{\text{п}i} \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

то фаза сигнала при $\frac{U_{\text{п}i}}{U_{\text{c}}} \ll 1$ будет составлять

$$\varphi(t) \approx \int_0^t \omega_{\text{c}}(t)\, dt + \sum_{i=1}^{k} \frac{U_{\text{п}i}}{U_{\text{c}}} \sin\left(\int_0^t \Omega_i(t) dt + \psi_i\right), \qquad (6)$$

где $\Omega_i(t) = \omega_{\text{c}}(t) - \omega_i$. Как следует из (6), в рассматриваемом случае спектр амплитуд помех с точностью до постоянного множителя переносится на фазу сигнала. Но амплитуда флюктуаций частоты как производная от фазы пропорциональна частоте $\Omega_i(t)$:

$$\omega(t) = \omega_{\text{c}}(t) - \sum_{i=1}^{k} \frac{U_{\text{п}i}}{U_{\text{c}}} \Omega_i(t) \cos\left(\int_0^t \Omega_i(t)\, dt + \psi_i\right).$$

Таким образом, частотная характеристика измерителя частоты, приведенная к аддитивным помехам, оказывается незатухающей периодической функцией частоты

$$K_u^*(\Omega) = \frac{2}{T} \sin \frac{\Omega T}{2}.$$

Для частотных измерительных систем представляет также интерес динамическая частотная характеристика, учитывающая «переходные» процессы в цифровом фильтре при воздействии помехи изменяющейся частоты (в частотной области):

$$\Omega_п(t) = \Delta\Omega \cos \int_0^t \Omega(t)\, dt.$$

Если частота помехи изменяется по линейному закону $\Omega(t) = \Omega_0 + \beta t$, то можно воспользоваться известными методами анализа динамических характеристик избирательных систем.

В [8] найдено общее выражение для сигнала на выходе пассивной линейной системы через комплексный динамический коэффициент передачи (динамическую частотную характеристику):

$$\vec{\overline{\Omega}}_п(t) = \vec{K}_д(\Omega)\, \vec{\Omega}_п(t).$$

Для рассматриваемого случая

$$\vec{K}_д(\Omega) = \frac{\vec{\overline{\Omega}}_п(t)}{\vec{\Omega}_п(t)} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp(-j\Omega\tau)\exp\left(j\,\frac{\beta\tau^2}{2}\right)d\tau.$$

Разложив член $\exp\left(j\,\frac{\beta\tau^2}{2}\right)$ в ряд Маклорена, получим

$$\vec{K}_д(\Omega) = \vec{K}(\Omega) + \sum_{n=1}^{m} (-j)^n \frac{\beta^n}{2^n\, n!}\, \frac{d^{2n}\vec{K}(\Omega)}{d\Omega^{2n}} + \varkappa,$$

где $\varkappa$ — остаточный член разложения; $\vec{K}(\Omega) = K_и(\Omega)$. Для не слишком больших значений β сохраним только три первых члена ряда ($m=2$). Тогда

$$\vec{K}_д(\Omega) \approx \vec{K}(\Omega) - j\,\frac{\beta}{2}\,\frac{d^2\vec{K}(\Omega)}{d\Omega^2} - \frac{\beta^2}{8}\,\frac{d^4\vec{K}(\Omega)}{d\Omega^4}. \tag{7}$$

Погрешность модуля выражения (7) не больше модуля $(m+1)$-го члена разложения, т. е. остаточный член

$$\Delta\left|\vec{K}_д(\Omega)\right| \leqslant \frac{\beta^3}{48}\left|\frac{d^6\vec{K}(\Omega)}{d\Omega^6}\right|.$$

Используя [5] и обозначив $\lambda = \Omega T/2$, динамическую частотную характеристику интегратора запишем в виде (предполагаем $T = \text{const}$)

$$\vec{K}_д(\Omega) = \frac{\sin\lambda}{\lambda} - \frac{\beta^2 T^4}{16}\left[\frac{\sin\lambda}{\lambda}\left(\frac{3}{\lambda^4} - \frac{3}{2\lambda^2} + \frac{1}{8}\right) - \frac{\cos\lambda}{\lambda^2}\left(\frac{3}{\lambda^2} - \frac{1}{2}\right)\right] - $$
$$- j\,\frac{\beta T^2}{4}\left[\frac{\sin\lambda}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\cos\lambda}{\lambda^2}\right],$$

модуль которой

$$K_д(\Omega) = \left|\vec{K}_д(\Omega)\right| = \sqrt{\left\{\frac{\sin\lambda}{\lambda} - \frac{\beta^2T^4}{16}\left[\frac{\sin\lambda}{\lambda}\left(\frac{3}{\lambda^4} - \frac{3}{2\lambda^2} + \frac{1}{8}\right) - \frac{\cos\lambda}{\lambda^2} \times \right.\right.} \rightarrow$$
$$\rightarrow \overline{\left.\left. \times \left(\frac{3}{\lambda^2} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}^2 + \frac{\beta^2 T^4}{16}\left[\frac{\sin\lambda}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\cos\lambda}{\lambda^2}\right]^2} \tag{8}$$

и аргумент

$$\psi_д(\Omega) = \operatorname{arctg} \frac{\dfrac{\beta T^2}{4}\left[\dfrac{\sin\lambda}{\lambda}\left(\dfrac{1}{\lambda^2} - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{\cos\lambda}{\lambda^2}\right]}{\dfrac{\sin\lambda}{\lambda} - \dfrac{\beta^2 T^4}{16}\left[\dfrac{\sin\lambda}{\lambda}\left(\dfrac{3}{\lambda^4} - \dfrac{3}{2\lambda^2} + \dfrac{1}{8}\right) - \dfrac{\cos\lambda}{\lambda^2}\left(\dfrac{3}{\lambda^2} - \dfrac{1}{2}\right)\right]}.$$

Чтобы оценить допустимые пределы использования полученных выражений, найдем отношение модулей $(m+1)$-го члена разложения к предыдущему члену m для двух случаев: $\lambda=0$ и $\lambda=\pi$. После выполнения нескольких громоздких расчетов получим:
Здесь $\gamma=\beta T^2$— безразмерный параметр, характеризующий изменение частоты на интервале усреднения.

Как видим, при значении $\lambda=\pi$ ограничения на величину γ менее жесткие, что достаточно очевидно из интуитивных соображений. Остаточным членом $\Delta\left|\vec{K}_д(\Omega)\right|$ можно пренебречь, если он по модулю меньше максимума последнего члена разложения. Другими словами, формулу (7) допустимо использовать при условии $\gamma/34<1$ или $\gamma<34$. При этом с увеличением λ точность ее возрастает.

Графики модуля динамической частотной характеристики (8) для нескольких значений параметра γ показаны на рис. 2, *а*, *б*.

Проведенный анализ позволяет сделать определенные выводы в отношении структуры выходного сигнала и динамических селективных свойств интегрирующей части измерителя. При значениях γ, не превышающих нескольких единиц, допустимо пренебречь членами высшего порядка в разложении (7), т. е. достаточную точность обеспечивает квазистационарный метод расчета. В этом случае огибающая выходного сигнала повторяет форму статической частотной характеристики (5). При бóльших значениях параметра γ частотная характеристика претерпевает существенные изменения, в частности при $\gamma=12$, как следует из рис. 1, *б*, полностью разрушается ее периодическая структура. Соответственно изменяются и селективные свойства измерителя частоты.

Частотные соотношения при дискретизации. Другой особенностью цифровых измерителей, определяющей их избирательные свойства,

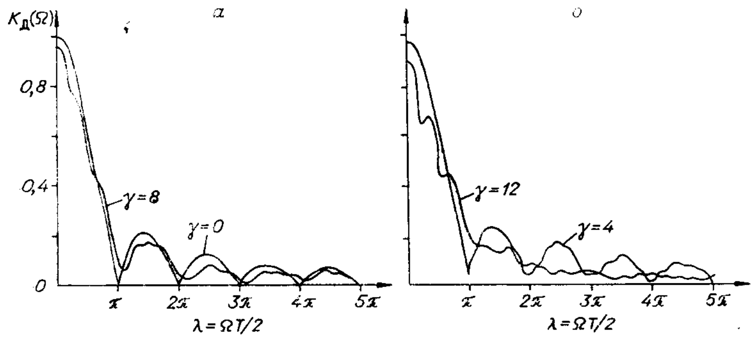

Рис. 2.

является упомянутая выше операция выборки отдельных значений частоты $\bar{\omega}(pT_\omega)$ с интервалом дискретности измерений T_0. Подобная операция в физическом отношении эквивалентна импульсному фильтру.

Так как в действительности $T_\omega \ll T_0$ при данном рассмотрении также можно считать $\bar{\omega}(pT_\omega) \approx \bar{\omega}(t)$. Последовательность дискретных значений непрерывной функции $\bar{\omega}(t)$, взятых с шагом T_0, образует функцию $\bar{\omega}(nT_0)$, связанную с исходной:

$$\bar{\omega}(nT_0) = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\omega}(t)\,\delta(t - nT_0)\,dt,$$

где $\delta(t - nT_0)$ — дельта-функция Дирака. Формально такая операция расширяет спектр сигнала до бесконечности. Но в информативном смысле дискретная выборка характеризуется значениями частот в интервале от $-\pi/T_0$ до π/T_0, т. е. той частью спектра, которая может быть восстановлена в соответствии с теоремой об отсчетах Котельникова.

Предполагая восстановление непрерывного сигнала путем интерполяции, будем считать, что эта процедура эквивалентна пропусканию дискретного сигнала через идеальный безынерционный фильтр с характеристикой

$$K_ф(\Omega) = \begin{cases} K_0 & \text{при } |\Omega| \leqslant \dfrac{\pi}{T_0}; \\ 0 & \text{при } |\Omega| > \dfrac{\pi}{T_0}. \end{cases} \tag{9}$$

Подобная дискретная система обладает частотной характеристикой

$$K_0(\Omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_ф\left(\Omega - \frac{2\pi}{T_0} n\right).$$

Результирующая частотная характеристика цифрового измерителя частоты определяется произведением соответствующих характеристик интегратора и дискретно-восстанавливающей части:

$$K(\Omega) = K_и(\Omega)\, K_0(\Omega) = K_и(\Omega) \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_ф\left(\Omega - \frac{2\pi}{T_0} n\right).$$

С учетом выражений (5), (9) окончательно получим

$$K(\Omega) = \frac{K_0}{\Omega T T_0} \sin\frac{\Omega T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{sgn}\left[\Omega - \frac{2\pi}{T_0}\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \operatorname{sgn}\left[\Omega - \frac{2\pi}{T_0}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \right\}. \tag{10}$$

Анализ выражения (10) показывает, что полоса пропускания цифрового измерителя частоты определяется частотной характеристикой интегратора, которая за счет дискретизации и последующего восстановления сигнала периодически трансформируется в интервал частот $|\Omega| \leqslant \frac{\pi}{T_0}$. Характеристика $K_и(\Omega)$ как бы «сложена» гармошкой

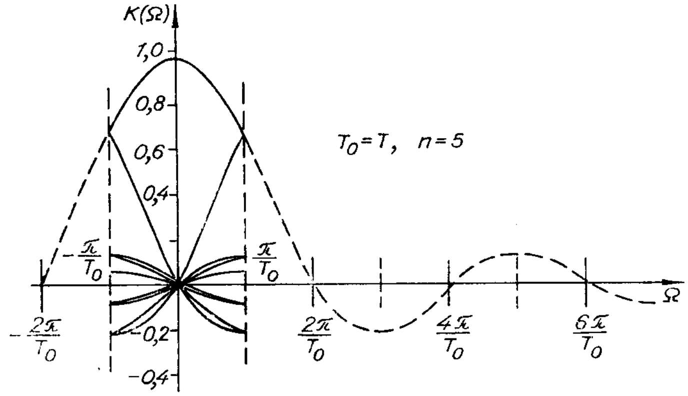

Рис. 3.

с перегибами оси частот в точках $\pm n\pi/T_0$, так что монотонно перестраиваемая частота $|\Omega|$ совершает в пределах $0 \leqslant |\Omega| \leqslant \frac{\pi}{T_0}$ возвратно-поступательные колебания с периодом $2\pi/T_0$.

Частотная характеристика $K(\Omega)$ для случая $T_0=T$ изображена на рис. 3. Для затухающей по амплитуде характеристики $K_и(\Omega)$ достаточную для практических расчетов точность обеспечивает учет $n=5T_0/T$ членов суммы в выражении (10). Аналогичные построения можно сделать для динамической частотной характеристики $K_д(\Omega)$, а также для приведенной характеристики $K_и^*(\Omega)$.

Структуру сигнала на выходе цифрового периодометра ($T=0{,}20$ с; $T_0=0{,}25$ с) иллюстрирует график линейно интерполированных дискрет (рис. 4), характеризующий погрешность измерения частоты $\omega_c(t)$ при воздействии гармонической помехи:

$$\omega(t) = \omega_c(t) + \Omega_п(t) = \omega_0 + \beta t + \theta(\Omega_0 + \beta t) \times \\ \times \sin\left(\Omega_0 t + \frac{\beta}{2} t^2\right), \tag{11}$$

где $\theta = \frac{U_п}{U_c}$. Начальная расстройка $\Omega_0=210$ рад/с, скорость изменения частоты полезного сигнала (помехи) $\beta=2{,}95$ рад/с^2.

На графике рис. 4 отчетливо видна амплитудная модуляция сигнала ошибки, обусловленная периодической структурой приведенной частотной характеристики интегратора $K_и^*(\Omega)$, а также периодическая

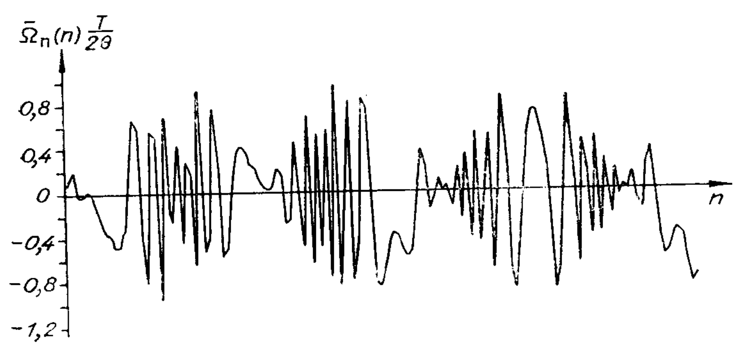

Рис. 4.

частотная модуляция симметричным пилообразным напряжением за счет стробоскопического эффекта.

Сумма ординат $/K(\Omega)/$ (см. рис. 3), по-видимому, соответствует трансформированному амплитудному спектру, равномерному на входе измерителя частоты, вид которого существенно зависит от соотношения T_0 и T. При анализе спектра погрешностей измерения с целью выявления источников помех следует учитывать, что на выходе измерителя могут наблюдаться низкочастотные гармоники, совершенно отсутствующие в спектре входного сигнала [9].

Заключение. Цифровой измеритель частоты, реализующий операцию численного дифференцирования фазы, представляет собой разомкнутую линейную систему, которая в частотной области выполняет функции интегратора и импульсного фильтра.

Результирующая частотная характеристика измерителя частоты является сложной периодической функцией частоты (в частотной области): частотная характеристика интегратора (периодическая) за счет стробоскопического эффекта оказывается периодически свернутой в пределах значений частот $|\Omega| \leqslant \frac{\pi}{T_0}$. Соответствующая трансформация спектра входного сигнала существенно затрудняет распознавание структуры помех.

Помехоустойчивость цифрового измерителя частоты в отношении аддитивных помех определяется приведенной частотной характеристикой интегратора $K_и^*(\Omega)$, являющейся незатухающей периодической функцией частоты. Если скорость изменения частоты паразитной модуляции измеряемой частоты $\beta > 2/T^2$, следует учитывать «переходные» процессы в интеграторе и использовать понятие динамической частотной характеристики. При значениях $\approx 12/T^2$ периодическая структура характеристики $K_и(\Omega)$ разрушается, что ограничивает возможности выявления скрытой периодичности по отношению к сигналам вида (11).

В заключение автор выражает глубокую благодарность канд. техн. наук И. Н. Гольдштейну за полезное обсуждение ряда вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рубчинский, А. А. Васильев и др. Об измерении мгновенной частоты частотно-модулированных колебаний.— Радиотехника и электроника, 1956, т. 1, № 7.
2. Р. А. Валитов, Г. П. Вихров. Погрешности цифровых измерителей интервалов времени и повышение их точности методом усреднения.— Измерительная техника, 1963, № 4.
3. А. В. Чижов, Б. Н. Добжинский. О погрешностях измерения изменяющейся частоты методом счета нулей. — Радиотехника, 1964, т. 20, № 1.
4. А. М. Телицин. Помехоустойчивость фазового метода измерения частоты.— Материалы I научно-технической конференции, посвященной Дню радио, ВАИА им. Ф. Э. Дзержинского, 1960.
5. А. М. Мишин. Погрешности за счет дискретных помех при измерении частоты фазовым методом.— Радиотехника, 1966, т. 21, № 7.
6. В. М. Ефимов. Квантование по времени при измерении и контроле. М., «Энергия», 1969.
7. Н. Г. Гаткин, В. А. Геранин, М. И. Карновский. Интеграторы в системах измерения. Киев, Гостехиздат УССР, 1963.
8. И. Т. Турбович. Динамические частотные характеристики избирательных систем.— Радиотехника, 1957, т. 12, № 11.
9. Капеллини. Цифровая фильтрация при наличии частотного сдвига спектра сигнала, подвергнутого выборке.— ТИИЭР, 1969, т. 57, № 2.

Поступила в редакцию
11 ноября 1971 г.