УДК 681.2.08

В. М. ЕФИМОВ, З. А. ЛИВШИЦ

(Новосибирск)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОГРЕШНОСТИ ЦИФРОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Цель настоящей заметки — получение предельных теорем, характеризующих погрешность цифрового прибора в случае измерений высокой точности. Имеется в виду ситуация, когда величина шага квантования по уровню q и «размах» независимой аддитивной помехи Y на входе аналого-цифрового преобразователя много меньше «размаха» измеряемого сигнала X. Ясно, что рассматриваемая модель может быть представлена в следующем виде: шаг квантования по уровню предполагается фиксированным; задана характеристическая функция погрешности $\tilde{\varphi}(t)$; предполагается, что измеряемый сигнал $X=cZ$, где c — константа, а Z — некоторая случайная величина; изучается случай $c\gg 1$.

Основной результат данного сообщения может быть сформулирован так: если к $f(z)$ — плотности вероятностей величины Z — применима формула суммирования Пуассона (по этому поводу см., например, [1, 2]), то при $c\longrightarrow\infty$ предельным распределением погрешности цифрового измерения является композиция помехи Y и случайной величины ξ, распределенной равномерно на $\left[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right]$.

Действительно, при указанных условиях характеристическая функция погрешности измерения величины cZ представима в виде [3]

$$\tilde{\Psi}_c(t)=\sum_k \tilde{f}\left(\frac{2\pi c}{q}k\right)\tilde{\varphi}\left(t+\frac{2\pi}{q}k\right)\frac{\sin 0{,}5q\left(t+\frac{2\pi}{q}k\right)}{0{,}5q\left(t+\frac{2\pi}{q}k\right)} \qquad (1)$$

(здесь $\tilde{f}(t)$ — характеристическая функция случайной величины Z), причем ряд в правой части (1) сходится при любом t равномерно по c. Выделяя в (1) член, соответствующий $k=0$, и переходя к пределу при $c\longrightarrow\infty$, ввиду равномерной сходимости ряда получаем

$$\lim_{c\to\infty}\tilde{\Psi}_c(t)=\frac{\sin 0{,}5qt}{0{,}5qt}\tilde{\varphi}(t). \qquad (2)$$

Правая часть (2) есть характеристическая функция свертки распределений Y и ξ. Пользуясь теперь теоремой непрерывности для характеристических функций [2], получаем, что при $c\longrightarrow\infty$ предельным для погрешности является распределение свертки величин Y и ξ.

Заметим, что приведенный результат справедлив и для случая зависимой помехи, если формула суммирования Пуассона применима к функции $f(z/y)$ — условной плотности вероятностей Z при фиксированном значении помехи.

Из (2) следует, что при отсутствии помехи на входе, т. е. при $\tilde{\varphi}(t)\equiv 1$, распределение шума квантования по уровню сходится к равномерному на $\left[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right]$ при $c\to\infty$; справедливо, однако, и более общее утверждение, гарантирующее сходимость плотностей вероятностей.

Пусть к функции $f(z)$ применима формула суммирования Пуассона. Тогда плотность вероятностей шума квантования w задается формулой

$$\theta_c(w)=\frac{1}{q}\sum_k \tilde{f}\left(\frac{2\pi c}{q}k\right)\frac{\sin 0{,}5q\left(t+\frac{2\pi}{q}k\right)}{0{,}5q\left(t+\frac{2\pi}{q}k\right)}; \quad -\frac{q}{2}<w\leqslant\frac{q}{2}. \qquad (3)$$

Как и выше, выделяя член с $k=0$, переходя к пределу при $c\longrightarrow\infty$ и пользуясь равномерной сходимостью ряда в (3), получаем:

$$\lim_{c\to\infty}\theta_c(w)=\frac{1}{q}; \quad -\frac{q}{2}\leqslant w\leqslant\frac{q}{2}. \qquad (4)$$

Последнее утверждение является обобщением теоремы Козуляева [4], так как монотонность плотности вероятностей при $|z| \longrightarrow \infty$ является частным случаем условий, при которых справедлива формула суммирования Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Бохнер. Лекции об интегралах Фурье. М., Физматгиз, 1962.
2. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., «Мир», 1967.
3. В. М. Ефимов. Квантование по времени при измерении и контроле. М., «Энергия», 1969.
4. П. А. Козуляев. О распределении дробной части случайной величины.— Математический сборник, новая серия, т. 2(44), вып. 5. М., Изд-во АН СССР, 1937.

Поступило в редакцию
15 июля 1971 г.