УДК 621.391 : 62—50

А. Г. СЕНИН

Оценка среднего значения случайной величины является одной из важных задач в измерительной практике. Как известно [1], среднеарифметическое значение $m_x^*[n]$ случайной величины x

$$m_x[n] = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_1}{n} \tag{1}$$

дает несмещенную оценку математического ожидания с минимальной дисперсией в классе линейных оценок. Однако получение ее связано с определенными трудностями, обусловленными характером вычислительных операций в (1). Поэтому несомненный интерес представляют рекуррентные алгоритмы оценок, используемые в задачах обучения [2] и отличающиеся простотой реализации. Последнее обстоятельство оказывается весьма существенным при разработке специализированных устройств обработки информации.

Текущую рекуррентную оценку $m_x[n]$ математического ожидания m_x определим так:

$$m_x[n] = m_x[n-1] + \gamma[n](x \qquad - m_x[n-1]), \tag{2}$$

где $\gamma[n]$ — положительные числа, удовлетворяющие определенным условиям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma[n] = \infty; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2[n] < \infty. \tag{3}$$

При этих условиях

$$\lim_{\to\infty} \overline{(m_x - m_x[n])^2} = 0 \tag{4}$$

и оценка (2) сходится в среднеквадратичном к математическому ожиданию m_x.

Скорость сходимости зависит от выбора чисел $\gamma[n]$, определяющих величину шага при новом предъявлении реализации. В частности, если принять

$$\gamma = \frac{1}{n}, \quad m_x[1] = x_1, \tag{5}$$

то оценка (1) будет совпадать с рекуррентной оценкой (2), а выбранный шаг — оптимальным. Дисперсия при этом оказывается равной

$$\sigma^2_{m^*[n]} = \frac{\sigma_x^2}{n}. \tag{6}$$

Использование переменного шага усложняет алгоритм обработки, поэтому весьма желательно оценить качество алгоритма с постоянным шагом, для которого $\gamma[n] = \text{const}$. Тогда

$$m[n] = m[n-1] + \gamma(x[n] - m[n-1]). \tag{7}$$

Рекуррентную оценку (7) можно явно выразить через значения ранее наблюдаемых величин, а именно:

$$m[n] = (1-\gamma)^n x_0 + \gamma \sum_{j=1}^{n} (1-\gamma)^{n-j} x_j. \tag{8}$$

При этом, так же как и в (1), оценка оказывается несмещенной, а дисперсия

$$\sigma^2_{m[n]} = \sigma_x^2 \left[(1-\gamma)^{2n} + \gamma^2 \sum_{j=1}^{n} (1-\gamma)^{2(n-j)} \right] =$$

$$= \sigma_x^2 \left\{ (1-\gamma)^{2n} + \gamma^2 [1 - (1-\gamma)^{2n}] + \frac{\gamma^2 (1-\gamma)^2 [(1-\gamma)^{2n} - 1]}{(1-\gamma)^2 - 1} \right\}. \tag{9}$$

Поскольку $\gamma=\text{const}$, дисперсия оценки не сходится к нулю, а ограничивается некоторым предельным значением. Действительно, из формулы (7) нетрудно выявить соотношение дисперсии для двух соседних оценок:

$$\sigma^2_{m[n]} = (1-\gamma)^2\,\sigma^2_{m[n-1]} + \gamma^2\sigma^2_x. \quad (10$$

Приняв $\sigma^2_{m[n]} = \sigma^2_{m[n-1]} = \sigma^2_m$, получим зависимость минимально достижимого значения σ^2_m / σ^2_x от величины γ:

$$\frac{\sigma^2_m}{\sigma^2_x} = \frac{\gamma}{2-\gamma}. \quad (11)$$

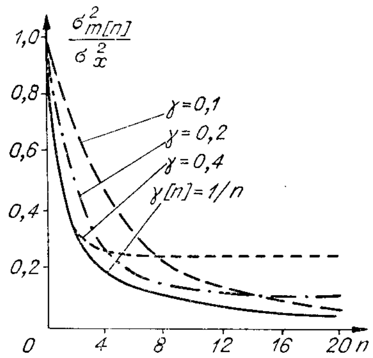

Рис. 1.

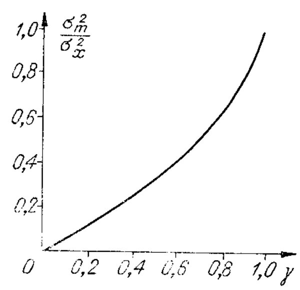

Рис. 2.

Впрочем, последний результат можно было бы получить из (9), если принять $n=\infty$. Эта зависимость отражена на рис. 1. Как видно, дисперсия оценки тем меньше, чем меньше шаг алгоритма. Однако уменьшение шага затягивает сходимость и для предельного значения $\gamma=0$ дисперсия оценки оказывается равной дисперсии случайной величины. Характер изменения дисперсии от числа γ представлен на рис. 2. Хотя дисперсия при фиксированном γ и не сходится к нулю, это не является помехой для практического использования алгоритма с постоянным шагом, поскольку реально всегда приходится ограничиваться предельной точностью оценки. Принимая во внимание простоту вычислительных операций, такие алгоритмы оказываются особенно ценными для получения текущих оценок контролируемых параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
2. Я. З. Цыпкин. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., «Наука», 1968.

Поступило в редакцию
25 августа 1971 г.