АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 1 1972

УДК 681.2.082/083.519.2

Б. А. МОРЯКИН
(Новосибирск)

ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ПРЕДСКАЗАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

В задачах автоматичеzксго управления и обработки результатов эксперимента в некоторых случаях статистические характеристики сигнала и ошибки измерения зависят от времени. Парамегры алгоритмов фильтрации и предсказания зависят от статистических характеристик сигнала и ошибки; следовательно, оптимальные алгсритмы фильтрации и предсказания в этом случае являются нестационарными. Ниже приводится решение задачи синтеза алгоритмов фильтрации и предсказания при условии, что последовательность случайных величин X_1, $X_2, \dots, X_n$, где X_i — значение случайной функции $X(t)$ при $t=t_i$, образует нестационарный марковский процесс, т. е.

$$p(x_i/x_{i-1}, \dots, x_1) = p(x_i/x_{i-1}); \quad p(x_i/x_{i-1}) \neq p(x_j/x_{j-1}),$$

если $i \neq j$, для линейной среднеквадритической регрессии случайной величины X_i на X_{i-1} вида $X_i = X_{i-1} + \Delta X_i$ $(i=2, \dots, n)$. Результат измерения реализации случайной функции $X(t)$ при $t=t_i$ есть случайная величина Y_i, которая связана со случайной величиной X_i соотношением

$$Y_i = X_i + H_i.$$

Случайная величина H_i не зависит от случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ и имеет математические ожидания:

$$EH_i = 0; \quad EH_i^2 = \sigma_i^2; \quad EH_iH_j = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Дисперсия σ_i^2 зависит от индекса i.

Постановка задачи. При заданной плотности распределения случайного вектора

$$X = (X_1, \dots, X_n); \quad p(x) = p(x_1)\, p(x_2/x_1) \dots p(x_n/x_{n-1})$$

и условной плэтности $p(y/x) = p(y_1/x_1) \dots p(y_n/x_n)$ найти функционалы T_n и P_{n+1} в пространстве значений вектора $Y=(Y_1, \dots, Y_n)$, минимизирующие критерии качества:

$$q_n = \int\limits_X \int\limits_Y p(x,y)\,[T_n(y) - x_n]^2\, dxdy \quad \text{(задача фильтрации);} \qquad (1a)$$

$$q_n = \int\limits_X \int\limits_Y \int\limits_{X_{n+1}} p(x, y, x_{n+1}) [P_{n+1}(y) - x_{n+1}]^2 \times$$
$$\times\, dx dy dx_{n+1} \text{ (задача предсказания).} \qquad (1б)$$

Функционал T_n в дальнейшем будем называть статистикой случайной величины X_n, функционал P_{n+1} — упредителем случайной величины X_{n+1}. Значения интегралов (1а) и (1б) зависят от выбора функционалов T_n и P_{n+1}, поэтому будем называть их соответственно критерием качества статистики T_n и упредителя P_{n+1}.

Известно, что минимум q_n достигается при

$$T_n(y) = \int\limits_{X_n} x_n\, p(x_n / y)\, dx_n\,. \qquad (2)$$

Однако эта статистика имеет простую реализацию лишь для некоторых плотностей распределения $p(x)$ и $p(y/x)$, например для нормальных. В общем случае вычисление оценки по формуле (2) требует значительного машинного времени, поэтому найдем оптимальную статистику в классе линейных функций, т. е. вида

$$T_n(y) = a_n(y^-) + b_n y_n\,, \qquad (3)$$

где $y^- = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ — вектор; переменная y_n других вхождений не имеет. Найдем значения коэффициентов $a_n(y^-)$, b_n, при которых величина q_n достигает минимума. Для этого подставим вместо $T_n(y)$ правую часть равенства (3) в выражение для критерия качества

$$q_n = \int\limits_X \int\limits_Y p(x,y) [a_n(y^-) + b_n y_n - x_n]^2 dx dy.$$

Функцию совместной плотности $p(x, y)$ можно записать в виде

$$p(x,y) = p(y^-)\, p(x/y^-)\, p(y_n / x, y^-).$$

Так как

$$p(y_n/x, y^-) = p(y_n/x_n),$$

то

$$p(x,y) = p(y^-)\, p(x/y^-)\, p(y_n/x_n).$$

При этом

$$q_n = \int\limits_{Y^-} p(y^-)\, dy^- \int\limits_X p(x/y^-)\, dx \int\limits_{Y_n} p(y_n/x_n) [a_n(y^-) + b_n y_n - x_n]^2 dy_n.$$

Прибавляя и вычитая в квадратных скобках величину $b_n m_{y_n/x_n} = b_n x_n$ и интегрируя по y_n, получим

$$q_n = \int\limits_{Y^-} p(y^-)\, dy^- \int\limits_X p(x/y^-) [a_n(y^-) - (1 - b_n) x_n]^2 dx +$$
$$+ b_n^2 \int\limits_{Y^-} p(y^-)\, dy^- \int\limits_X p(x/y^-)\, \sigma_n^2\, dx.$$

Так как дисперсия случайной величины H_n не зависит от случайных векторов XY^-, то

$$q_n = (1 - b_n)^2 \int\limits_{Y^-} p(y^-)\, dy^- \int\limits_X p(x/y^-) \left[\frac{a_n(y^-)}{1 - b_n} - x_n \right]^2 dx + b_n^2 \sigma_n^2.$$

Первое слагаемое в правой части равенства есть критерий качества упредителя для случайной величины X_n; следовательно, критерий каче-

$$P_n(y^-) = \frac{\ldots}{1-b_n}$$

является упредителем для случайной величины X_n. Найдем его вид. Линейная среднеквадратическая регрессия случайной величины X_n на x_{n-1} по условию имеет вид $X_n = X_{n-1} + \Delta X_n$. При этом условное математическое ожидание равно

$$m_{x_n|x_{n-1}} = x_{n-1} + m_{\Delta x_n}.$$

Функцию плотности условной случайной величины X/y^- можно записать следующим образом:

$$p(x/y^-) = p(x^-/y^-)\,p(x_n/x^-, y^-) = p(x^-/y^-)\,p(x_n/x_{n-1}).$$

Подставляя это выражение для функции плотности в критерий качества статистики T_n, прибавляя и вычитая в квадратных скобках величину $m_{x_n/x_{n-1}}$ и интегрируя по x_n, получим

$$q_n = (1-b_n)^2 \int\limits_{Y^-} p(y^-)\,dy^- \int\limits_{X^-} p(x^-/y^-)\left[\frac{a_n(y^-)}{1-b_n} - x_{n-1} - m_{\Delta x_n}\right]^2 dx^- +$$
$$+ (1-b_n)^2\sigma^2_{\Delta x_n} + b_n^2\sigma_n^2.$$

Так как статистика $T_{n-1}(y^-)$ минимизирует интеграл

$$q_{n-1} = \int\limits_{Y^-} p(y^-)\,dy^- \int\limits_{X^-} p(x^-/y^-)\,[T_{n-1}(y^-) - x_{n-1}]^2\,dx^-,$$

то, принимая

$$a_n(y^-) = (1-b_n)\left[T_{n-1}(y^-) + m_{\Delta x_n}\right],$$

получаем

$$q_n = (1-b_n)^2 q_{n-1} + (1-b_n)^2\sigma^2_{\Delta x_n} + b_n^2\sigma_n^2,$$

где величины q_n и q_{n-1} одновременно достигают минимума на множестве функционалов T_{n-1}. Оптимальный упредитель определяется

$$P_n(y^-) = T_{n-1}(y^-) + m_{\Delta x_n}.$$

Оптимальное значение параметра b_n находится из условий:

$$\partial q_n/\partial b_n = 0; \quad \partial^2 q_n/\partial b_n^2 > 0$$

и имеет вид

$$b_n = \frac{q_{n-1} + \sigma^2_{\Delta x_n}}{q_{n-1} + \sigma^2_{\Delta x_n} + \sigma_n^2}.$$

Критерий качества статистики T_n при этом значении b_n равен

$$q_n = b_n\sigma_n^2.$$

Таким образом, оптимальная в классе линейных функций статистика T_n и упредитель P_{n+1} определены. Вычисление статистики и упредителя выполняется по рекуррентным формулам в последовательности:

$$1)\ b_n = \frac{q_{n-1} + \sigma^2_{\Delta x_n}}{q_{n-1} + \sigma^2_{\Delta x_n} + \sigma_n^2};$$

$$2)\ a_n(y^-) = (1-b_n)\left[T_{n-1}(y^-) + m_{\Delta x_n}\right];$$

$$3)\ T_n(y) = a_n(y^-) + b_n y_n;$$

$$4)\ q_n = b_n \sigma_n^2;$$

$$5)\ P_{n+1}(y) = T_n(y) + m_{\Delta x_{n+1}}.$$

Характерной особенностью полученной статистики T_n и упредителя P_{n+1} является то, что критерий качества вычисляется на каждом шаге. Это дает возможность согласовать качество статистики и упредителя с требуемым качеством путем изменения частоты измерения функции $x(t)$. Пусть $x(t)$ — непрерывная функция с ограниченной первой производной. Тогда

$$x_n = x_{n-1} + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} x'(t)\,dt = x_{n-1} + \Delta x_n.$$

Если $|x'(t)| \leqslant c$, то $|\Delta x_n| \leqslant c\Delta t$. Задаваясь распределением для случайной величины ΔX_n, например равномерным, в интервале $[-c\Delta t_n, c\Delta t_n]$ можно найти дисперсию случайной величины ΔX_n, которая зависит от интервала Δt_n. Пусть требуемый критерий качества статистики T_n равен q_n^0. Если $q_n > q_n^0$, то, уменьшая интервал Δt_n, получим меньшее значение $\sigma_{\Delta x_n}^2$, что приведет к уменьшению q_n при дальнейшем увеличении n. Изменение частоты измерения дает возможность получить требуемое качество фильтрации и упреждения при минимальной частоте решения задач на ЦВМ.

Полученное решение задачи для нестационарного сигнала и ошибки, т. е. при переменных $\sigma_{\Delta x_n}^2$, σ_n^2, является обобщением методов фильтрации и упреждения, использующих стационарные модели сигнала и ошибки, а также обобщением метода наименьших квадратов. Покажем, что при гипотезах сигнала и ошибки, принимаемых в этих методах, приведенная выше статистика и статистики, получаемые по этим методам, совпадают.

1. Пусть модель стационарна:

$$\sigma_{\Delta x_i}^2 = \text{const}; \quad \sigma_i^2 = \text{const}; \quad m_{\Delta x_i} = \text{const} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Покажем, что при этих условиях последовательность $q_1, \ldots, q_n$ сходится к некоторой постоянной величине q^*. Имеем

$$q_n = \frac{q_{n-1} + \sigma_{\Delta x}^2}{q_{n-1} + \sigma_{\Delta x}^2 + \sigma^2}\sigma^2.$$

Найдем значение q^* такое, что если $q_{n-1} = q^*$, то $q_n = q^*$:

$$q^* = \frac{q^* + \sigma_{\Delta x}^2}{q^* + \sigma_{\Delta x}^2 + \sigma^2}\sigma^2.$$

Отсюда имеем:

$$q^{*2} + q^*\sigma_{\Delta x}^2 - \sigma^2\sigma_{\Delta x}^2 = 0; \tag{4}$$

$$q^* = -\frac{\sigma_{\Delta x}^2}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_{\Delta x}^2}{4} + \sigma^2\sigma_{\Delta x}^2}.$$

Знак плюс взят потому, что $q^* \geqslant 0$.

Необходимо доказать, что при любых начальных значениях q_1 последовательность $q_1, \ldots, q_n$ сходится к величине q^*. Обозначим

$q_n = q^* + \varepsilon_n$ и подставим вместо соответствующих значений q_n и q_{n-1}:

$$q^* + \varepsilon_n = \frac{q^* + \varepsilon_{n-1} + \sigma_{\Delta x}^2}{q^* + \varepsilon_{n-1} + \sigma_{\Delta x}^2 + \sigma^2} \sigma^2.$$

Так как q^* является корнем уравнения (4), то

$$q^* \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n \left(q^* + \varepsilon_{n-1} + \sigma_{\Delta x}^2 + \sigma^2\right) = \varepsilon_{n-1}\sigma^2,$$

или

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} \frac{\sigma^2 - q^*}{q_{n-1} + \sigma_{\Delta x}^2 + \sigma^2}.$$

Величина $\sigma^2 - q^*$, при конечных $\sigma_{\Delta x}^2$ и $\sigma^2 > 0$, больше нуля, поэтому величины ε_n и ε_{n-1} имеют один знак, причем

$$|\varepsilon_n| < |\varepsilon_{n-1}|.$$

Следовательно, последовательность $q_1, \ldots, q_n$ сходится к величине q^* монотонно. Так как $b_n = q_n / \sigma^2$, то последовательность величин $b_1, \ldots, b_n$ сходится к значению $b^* = q^*/\sigma^2$.

Найдем общий вид стационарной статистики $T(y)$ при постоянном b^*. Для стационарной модели имеем:

$$T_n(y^{(n)}) = (1 - b^*) T_{n-1}(y^{(n-1)}) + b^* y_n;$$

$$T_{n-1}(y^{(n-1)}) = (1 - b^*) T_{n-2}(y^{n-2}) + b^* y_{n-1}.$$

. . . .

Здесь $y^{(n)} = (y_1, \ldots, y_n)$; $y^{(n-1)} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Последовательной подстановкой получаем

$$T_n(y) = b^* \sum_{i=1}^{n} (1 - b^*)^{n-i} y_i.$$

Так как

$$\frac{(1 - b^*)^{n-i}}{(1 - b^*)^{n-i-1}} = 1 - b^* = \text{const},$$

то

$$(1 - b^*)^{(n-i)} = e^{-\lambda (n-i)},$$

где $\lambda = -\ln(1 - b^*)$. Статистика T_n имеет вид

$$T_n(y) = b^* \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda (n-i)} y_i,$$

т. е. оптимальным стационарным фильтром для марковского стационарного процесса является инерционное звено первого порядка с постоянной времени λ.

2. В методе наименьших квадратов* принимается, что функция $x(t)$ имеет разложение в конечный ряд

$$x(t) = \sum_{s=1}^{m} a_s \varphi^s(t).$$

При этом $p(x_n / x_{n-1}, \ldots, x_1) = p(x_n / x_{n-1}, \ldots, x_{n-m})$, причем функция плотности $p(x_n / x_{n-1}, \ldots, x_{n-m})$ есть δ-функция и дисперсия $\sigma^2_{x_n/x_{n-1}}, \ldots, x_{n-m} = 0$. Для марковского процесса $\sigma^2_{x_n/x_{n-1}} = 0$, откуда

* Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Гостехиздат, 1962.

следует, что $x(t) = \text{const}$. При этих условиях

$$q_n = \frac{q_{n-1}}{q_{n-1}+\sigma^2}\sigma^2.$$

На первом шаге критерий качества статистики $q_1 = \sigma^2$. На втором шаге $q_2 = \sigma^2/2$. Если на $(n-1)$-м шаге $q_{n-1} = \sigma^2/_{n-1}$, то $q_n = \sigma^2/n$. Отсюда $b_n = q_n/\sigma^2 = \frac{1}{n}$ и

$$T_n(y^{(n)}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) T_{n-1}(y^{(n-1)}) + \frac{1}{n} y_n;$$

$$T_{n-1}(y^{(n-1)}) = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) T_{n-2}(y^{(n-2)}) + \frac{1}{n-1} y_{n-1}.$$

. . . .

Последовательной подстановкой получим

$$T_n(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Эта статистика совпадает со статистикой, получаемой по методу наименьших квадратов.

В общем случае, т. е. при переменных $\sigma^2_{\Delta x_i}$, σ^2_i, $m_{\Delta x_i}$, стационарная статистика ($\lambda = \text{const}$) и статистика по методу наименьших квадратов не являются оптимальными, поэтому при одинаковых критериях качества нестационарная оптимальная статистика дает минимальную частоту измерения функции $x(t)$ и решения задач обработки информации на ЦВМ, что позволяет уменьшить требования к пропускной способности измерительного и вычислительного комплексов.

Поступила в редакцию
4 марта 1971 г.