А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я
№ 1 1972

УДК 621.317.733

Л. П. БОРОВСКИХ
(*Москва*)

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ МЕТОДОМ УРАВНОВЕШИВАНИЯ

В настоящее время большое внимание уделяется задаче автоматического измерения параметров комплексного сопротивления, представляемого двухэлементной схемой замещения. Однако представление объекта измерения двухэлементной схемой замещения далеко не всегда отражает в достаточной мере его сущность, а информации, получаемой при измерении параметров двухэлементной схемы, часто бывает недостаточно для полной его характеристики. Более полное описание объекта измерения можно получить, используя многоэлементную схему его замещения. Анализ научных и технических задач, требующих измерения параметров комплексного сопротивления, показывает, что во многих случаях объект измерения может быть представлен линейным электрическим многоэлементным двухполюсником.

Методы измерения параметров многоэлементных двухполюсников только начинают разрабатываться [1—3]. Одним из перспективных способов измерения параметров двухполюсников является способ, заключающийся в следующем: нулевую измерительную цепь, содержащую исследуемый двухполюсник и образцовый, набранный по идентичной схеме с исследуемым, уравновешивают путем регулировки параметров образцового двухполюсника одновременно на нескольких частотах. После уравновешивания цепи по значениям параметров образцового двухполюсника можно отсчитать величины измеряемых параметров. В случае простейших многоэлементных двухполюсников, например трехэлементных, нетрудно показать, что если уравновесить измерительную цепь на нескольких частотах, то в положении равновесия параметры образцового двухполюсника равны соответствующим параметрам исследуемого. Однако неясно, имеет ли место такое соответствие в случае более сложных двухполюсников и вообще позволяет ли данный способ однозначно измерять параметры любого двухполюсника. Решению этого вопроса и посвящено данное сообщение.

Рассмотрим сначала многоэлементные двухполюсники, состоящие из элементов R и C. Функция сопротивления такого двухполюсника имеет вид (см., например, [4])

$$Z(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{a_{2n} p^n + a_{2n-1} p^{n-1} + \ldots + a_{n+1} p}, \tag{1}$$

где n — число независимых контуров схемы двухполюсника; $| a \cdot|\cdot a_{i_1}$ коэффициенты функции сопротивления двухполюсника. Поскольку независимыми являются только $2n$ коэффициентов a_i (один из коэффициентов, например a_0, можно положить равным единице), то полное представление об RC-двухполюснике можно получить, уравновесив измерительную цепь на n различных частотах, что дает систему n векторных уравнений

$$\dot{Z}_x(j\omega_i) = \dot{Z}_0(j\omega_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

или систему $2n$ скалярных уравнений

$$\mathrm{Re}\left[\dot{Z}_x(j\omega_i) - Z_0(j\omega_i)\right] = 0;$$

$$\mathrm{Im}\left[\dot{Z}_x(j\omega_i) - Z_0(j\omega_i)\right] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

При определителе D системы (3), не равном нулю:

$$D \neq 0, \tag{4}$$

решение системы единственно и равно

$$a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

где b_i — коэффициенты функции $Z_0(p)$ образцового двухполюсника. В свою очередь, коэффициенты a_i являются в общем случае функциями всех m параметров двухполюсника. (Под параметрами понимаются величины сопротивлений (проводимостей) и емкостей элементов, из которых состоит данный двухполюсник.) Таким образом, относительно искомых параметров x_1, x_2, ..., x_m имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_m); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2n} &= f_{2n}(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку f_i — непрерывно дифференцируемые функции (в этом можно убедиться, воспользовавшись для нахождения их вида теоремой об определителе суммы матриц [5, 6]), то на основании теоремы о непрерывно дифференцируемых отображениях можно утверждать, что $2n$ параметров x_j определяются из (4) однозначно, если якобиан

$$\left|\frac{\partial(a_1, \ldots, a_{2n})}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right| \neq 0 \tag{6}$$

во всей области значений параметров x_j, т. е. для любой точки $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$ положение равновесия измерительной цепи единственно. Поскольку образцовый двухполюсник выполнен по идентичной схеме с исследуемыми, то положение равновесия достигается при $x_j = x_j^0$, где x_j^0 — параметры образцового двухполюсника, т. е. при соответственном равенстве параметров сравниваемых двухполюсников.

Таким образом, однозначно можно измерить параметры только таких двухполюсников, для которых число m элементов схемы замещения меньше или равно удвоенному числу $2n$ независимых контуров и выполняются условия (4) и (6). Для этого измерительную цепь достаточно уравновесить на n различных частотах. Если же $m > 2n$, то параметры такого двухполюсника принципиально нельзя измерить однозначно.

Сделанный вывод справедлив и для RL-двухполюсников. В этом случае функция сопротивления записывается так:

$$Z(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{a_{2n-1} p^{n-1} + \ldots + a_{n+1} p + 1}$$

и все рассуждения, сделанные выше, остаются в силе.

Интересным, с практической точки зрения, является вопрос о возможности измерения параметров многоэлементных двухполюсников, содержащих элементы R, C и так называемый импеданс Варбурга. Измерение параметров таких двухполюсников необходимо, например, в электрохимии при исследовании процессов, протекающих на границе электрод — электролит [7]. Импеданс Варбурга представляет собой импеданс полубесконечной RC-линии с распределенными параметрами. В стационарном режиме его можно рассматривать как элемент с входным импедансом $\dot{z}(p) = \frac{W}{\sqrt{p}}$; $W = \sqrt{\frac{r_0}{C_0}}$, где r_0 и C_0— величины сопротивления и емкости на единицу длины линии. Матрица импедансов двухполюсника, содержащего R, C и W, состоит из элементов

$$\dot{z}_{ij}(p) = R_{ij} + \frac{1}{pC_{ij}} + \frac{W_{ij}}{\sqrt{p}}.$$

Функция сопротивления такого двухполюсника имеет вид

$$Z(p) = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-\frac{1}{2}} + a_2 p^{n-1} + \ldots + a_{2n-2} p + a_{2n-1} p^{1/2} + 1}{b_0 p^n + b_1 p^{n-\frac{1}{2}} + b_2 p^{n-1} + \ldots + b_{2n-3} p^{3/2} + b_{2n-2} p}.$$

Здесь вектор коэффициентов функции сопротивления имеет $4n-1$ независимых компонент.

Путем рассуждений, аналогичных изложенным выше, можно прийти к выводу, что параметры двухполюсника, содержащего элементы R, C и импедансы Варбурга, нельзя определить однозначно, если $m < 4n-1$. Для определения параметров при $m_э \leqslant 4n-1$ и условиях, аналогичных (4), (6), измерительную цепь необходимо уравновесить на $2n$ различных частотах.

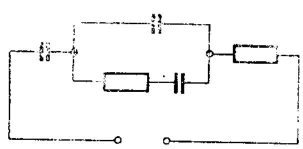

Рис 1.

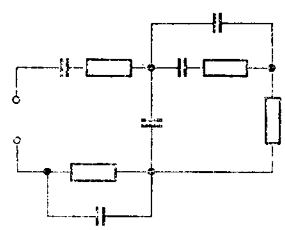

Рис. 2.

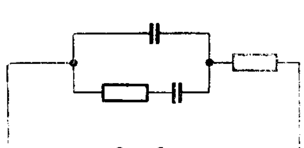

Рис. 3.

Рассмотрим несколько примеров. Двухполюсник рис. 1 имеет пять элементов ($m=5$), два независимых контура ($n=2$). Казалось бы, что для определения параметров такого двухполюсника достаточно уравновесить измерительную цепь на трех различных частотах и система (3) будет состоять из шести уравнений относительно пяти неизвестных. Однако какие бы пять уравнений этой системы мы ни взяли, они оказываются зависимыми и не позволяют определить искомые параметры. Дело в том, что для такого двухполюсника $m > 2n$ и в соответствии с нашими выводами его параметры нельзя измерить однозначно. То же самое можно сказать о более сложном двухполюснике рис. 2. Для него $m=9$, $n=4$.

Двухполюсник рис. 3 имеет 2 независимых контура и 4 элемента, т. е. $m=2n$. Если записать условия (4) и (6), то можно убедиться, что они выполняются. Для определения параметров такого двухполюсника измерительную цепь достаточно уравновесить на двух частотах (число частот должно быть равно числу контуров).

Сделанные выводы позволяют судить о принципиальной возможности измерения параметров многоэлементных двухполюсников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Красильщик, Ю. В. Фишер. Способ измерения комплексных сопротивлений. Авторское свидетельство № 158627.— БИ, 1963, № 22.
2. А. А. Чеснис. Способ измерения сложных комплексных сопротивлений. Авторское свидетельство № 200662.— ИОПТЗ, 1967, № 17.
3. К. М. Соболевский, С. М. Казаков, С. П. Новицкий. Способ измерения параметров нерезонансных пассивных трехэлементных двухполюсников. Авторское свидетельство № 234508. — ИПОТЗ, 1969, № 4.
4. Г. И. Атабеков. Теория линейных электрических цепей. М., «Советское радио», 1960.
5. Я. К. Трохименко. Обобщенный метод построения канонических схем пассивных двухэлементных двухполюсников.— ИВУЗ, Радиотехника, 1966, т. IX, № 3.
6. В. П. Сигорский. Теорема об определителе суммы матриц и ее применение для выражения коэффициентов полиномов функций электронной схемы. — Радиотехника, 1968, т. 23, № 10.
7. Д. И. Лейкис. Импеданс электрохимических систем с твердыми электродами как источник информации о свойствах этих систем.— Автореферат докт. дисс. М., 1967.

Поступила в редакцию
2 марта 1971 г.,
окончательный вариант —
11 июня 1971 г.