А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я
№ 1 1972

ТЕОРИЯ СИСТЕМ СБОРА И ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

УДК 621.317 + 519.21

М. Г. ЗОТОВ
(Москва)

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА — ХОПФА И ЗАДЕ — РАГАЦЦИНИ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Операционные методы нашли широкое приложение во многих разделах теории автоматического управления. В то же время область их применения в одном из важнейших ее разделов — статистической динамике систем управления — сужена. Специально посвященная этому вопросу книга [1] не в полной мере использует возможности операторных методов в части решения основных интегральных уравнений. Настоящая статья в какой-то мере дополняет этот раздел.

Необходимо также отметить, что, с методической точки зрения, весьма важна разработка единых методов решения задач какой-либо области.

1. Решение уравнения Винера — Хопфа. Интегральное уравнение Винера — Хопфа имеет вид [2, 3]

$$\int\limits_0^\infty R_\varphi(\tau-\lambda)\,k(\lambda)\,d\lambda = R_{h\varphi}(\tau); \quad \tau \geqslant 0. \tag{1}$$

Применив к левой и правой частям преобразование Лапласа и проведя несложные преобразования, получим

$$\int\limits_0^\infty k(\lambda)\,e^{-s\lambda}\int\limits_{-\lambda}^\infty R_\varphi(\theta)\,e^{-s\theta}\,d\theta = \int\limits_0^\infty R_{h\varphi}(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau. \tag{2}$$

Предположим, что корреляционная функция входного сигнала $\varphi(t)$ может быть представлена

$$R_\varphi(\theta) = \sum_{i=1}^{k} a_i\,e^{\alpha_i|\theta|}; \quad \operatorname{Re}\alpha_i < 0. \tag{3}$$

Соответствующая этой корреляционной функции спектральная плотность может быть записана

$$S_\varphi(s) = \frac{R\,(s)}{P\,(s)} = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2 - s^2}. \tag{4}$$

Преобразуем левую часть (2), использовав (3):

$$\int\limits_0^\infty k(\lambda)\,e^{-s\lambda}\,d\lambda \sum_{i=1}^{r} a_i \int\limits_{-\lambda}^\infty e^{\alpha_i|\theta|}\,e^{-s\theta}\,d\theta = \int\limits_0^\infty k(\lambda)\,e^{-s\lambda}\,d\lambda \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{r} a_i \left[\int_{-\lambda}^{0} e^{-\alpha_i \theta} e^{-s\theta} d\theta + \int_{0}^{\infty} e^{\alpha_i \theta} e^{-s\theta} d\theta \right] = \int_{0}^{\infty} k(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{r} a_i \left[\frac{1}{-\alpha_i - s} \left(1 - e^{(\alpha_i + s)}\right) - \frac{1}{\lambda_i - s} \right] = S_\varphi(s) k(s) -$$

$$- \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{k(-\alpha_i)}{-\alpha_i - s} = S_\varphi(s) k(s) - \frac{\sum_{i=0}^{r} b_i s^i}{p^+(s)}. \qquad (5)$$

Введем обозначение

$$\Lambda(s) = \int_{0}^{\infty} R_{h\varphi}(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \qquad (6)$$

С учетом (2), (5), (6) запишем решение

$$k(s) = \frac{\Lambda(s) + \dfrac{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i}{p^+(s)}}{S_\varphi(s)}. \qquad (7)$$

Значения b_i выбираются из условия, чтобы функция $K(s)$ имела полюсы только слева от мнимой оси. Необходимо отметить, что расчет по формуле (7) проще, чем по существующим методикам [2, 3].

2. Решение уравнения Заде — Рагаццини. Отметим, что существующие методы решения уравнения Заде — Рагаццини, пердложенные самими авторами [3], трудны для понимания в силу искусственности приема; метод, основанный на применении функции Грина [3], требует знания специальных разделов из теории дифференциальных уравнений.

Интегральное уравнение Заде — Рагаццини [2]:

$$\int_{0}^{T} R_\varphi(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \tau^i + R_{h\varphi}(\tau); \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T. \qquad (8)$$

Предположим, как и прежде, что корреляционная функция входного сигнала может быть представлена в виде (3). От левой и правой частей (8) возьмем преобразование Лапласа на интервале существования равенства.

Преобразование Лапласа для левой части (8) с использованием (3)

$$\int_{0}^{T} k(\lambda) e^{-sh} d\lambda \sum_{i=1}^{r} a_i \int_{-\lambda}^{T-\lambda} e^{\alpha_i |\theta|} e^{-s\theta} d\theta = \int_{0}^{T} k(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{r} a_i \left[\int_{-\lambda}^{0} e^{-\alpha_i \theta} e^{-s\theta} d\theta + \int_{0}^{T-\lambda} e^{\alpha_i \theta} e^{-s\theta} d\theta \right] = \int_{0}^{T} k(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{r} a_i \left[\frac{1}{-\alpha_i - s} \left(1 - e^{(\alpha_i + s)\lambda}\right) - \frac{1}{\alpha_i - s} \times \left(1 - e^{(\alpha_i - s)(T-\lambda)}\right) \right] =$$

$$= S_\varphi(s) k(s) - \sum_{i=1}^{r} a_i \left[\frac{k(-\alpha_i)}{-\alpha_i - s} + \frac{k(+\alpha_i)}{\alpha_i - s} e^{T(\alpha_i - s)} \right] = S_\varphi(s) k(s) -$$

$$- \frac{\sum_{i=0}^{r} b_i s^i}{p^-(s)} - \frac{\sum_{i=0}^{r} c_i s^i}{p^+(s)} e^{T(\alpha_i - s)}. \qquad (9)$$

Преобразование Лапласа на интервале существования равенства (8) ст правой части:

0

Используя (9), (10), решение уравнения (8) можно записать так:

$$k(s)=\frac{1}{S_{\varphi}(s)}\left\{\frac{\sum\limits_{i=0}^{r} b_i s^i}{p^-(s)}+\frac{\sum\limits_{i=0}^{r} c_i s^i}{p^+(s)}\, e^{T(t_i-s)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{n}\gamma_i\left[\frac{i!}{s^{i+1}}e^{-sT}\sum_{p=0}^{i}\frac{i!}{p!}\,\frac{T^p}{s^{i-p+1}}\right]+\Lambda(s)\right\}. \qquad (12)$$

Параметры b_i и c_i определяются из условия минимума среднеквадратичной ошибки, параметры γ_i — из условия обеспечения заданных величин моментов от искомой импульсной переходной функции.

Пример 1. *Исходные данные.* Спектральная плотность и корреляционная функция полезного сигнала равны соответственно

$$S_m(s)=\frac{3}{1-s^2};\quad R_m(\tau)=\frac{3}{2}\,l^{-|\tau|}.$$

Те же характеристики для помехи:

$$S_n(s)=1;\quad R_n(\tau)=\delta(\tau)$$

и полезного сигнала с наложенной на него помехой

$$S_{\varphi}(s)=S_m(s)+S_n(s)=\frac{4-s^2}{1-s^2};\quad R_{\varphi}(\tau)=\delta(\tau)+\frac{3}{2}\,l^{-|\tau|}.$$

Решение:

$$\Lambda(s)=\int_0^{\infty}R_n(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau=\frac{3}{2}\int_0^{\infty}e^{-|\tau|}\,e^{-s\tau}\,d\tau=\frac{3}{2}\,\frac{}{1-s};$$

$$k(s)=\frac{3}{2}\,\frac{1-s^2}{4-s^2}\left[\frac{b_0}{1+s}-\frac{1}{1-s}\right]=\frac{3}{2}\,\frac{\frac{b_0+1}{-b_0+1}-s}{4-s^2}\,(-b_0+1);$$

приняв $\frac{b_0+1}{-b_0+1}=2$, получим $b_0=1/3$; тогда $k(s)=\frac{1}{2+s}$.

Это решение совпадает с решением, полученным обычным способом.

Пример 2. *Исходные данные.* Спектральная плотность и корреляционная функция помехи соответственно выражаются:

$$S_n(s)=\frac{2}{1-s^2};\quad R_n(\tau)=e^{-|\tau|}.$$

Полезный сигнал описывается соотношением $g(t)=k_0+k_1t$, причем значения k_0 и k_1 неизвестны. Время наблюдения T.

Решение. Применительно к заданным исходным данным оптимальная передаточная функция, согласно (12), имеет вид

$$k(s)=\frac{1-s^2}{2}\left\{\frac{b_0}{1-s}+\frac{c_0}{1+s}e^{-T(1+s)}-\frac{\gamma_0}{s}(e^{-sT}-1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_1}{s}\left(\frac{1}{s}-Te^{-sT}-\frac{e^{-sT}}{s}\right)\right\}.$$

Значения неизвестных параметров b_0, c_0, γ_0, γ_1 находим из условия минимума среднеквадратичной ошибки по параметрам b_0 и c_0 и равенства двух первых коэффициентов ошибок $\mu_0=1-k(0)$, $\mu_1=k'(0)$ нулю.

Величина среднеквадратичной ошибки:

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty}|k(s)|^2S_n(s)\,ds=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{b_0}{1-s}+\frac{c_0}{1+s}e^{-T(1+s)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\gamma_0}{s}(e^{-sT}-1)+\frac{\gamma_1}{s}\left(\frac{1}{s}-Te^{-sT}-\frac{e^{-sT}}{s}\right)\right|^2\frac{1-s}{2}\,ds.$$

Беря частную производную от величины среднеквадратичной ошибки по b_0 и приравнивая ее нулю, получим

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial b_0}=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty}\{-b_0+\gamma_0+(c_0e^{-1}-\gamma_0-\gamma_1T)\,e^{-sT}\}\,ds.$$

Но равенство нулю этого интеграла возможно только при условии, что

$$\gamma_0=b_0;\; c_0e^{-1}-\gamma_0-\gamma_1T=0.$$

Если взять частную производную по c_0 и приравнять ее нулю, получим те же два уравнения.

Условие $k(0)=1$ приводит к следующему уравнению:

$$b_0+c_0e^{-T}+\gamma_0T+\gamma_1T^2=2.$$

Из условия $k'(0)=0$ следует

$$-T\frac{c_0e^{-T}}{2}+\frac{\gamma_1}{2}+(\gamma_0-b_0)-(c_0e^{-1}-\gamma_1-\gamma_1T)-\frac{\gamma_0}{4}T^2-\frac{\gamma_1}{6}T^3=0.$$

Из полученной системы уравнений можно найти параметры γ_0, γ_1, b_0, c_0. Полученная по этому методу система линейных уравнений совпадает с найденной обычным способом [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Склярeвич. Операторные методы в статистической динамике автоматических систем. М., «Наука», 1965.
2. В. С. Пугачев. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
3. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию
23 июня 1971 г.