АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 1 1972

УДК 53.072 : 51.08

Э. И. КУЧЕРЕНКО
(Рязань)

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА Б. Г. ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Нередко требуется по результатам измерения выходных величин динамических систем определить входные воздействия. Для решения таких задач удобно использовать обратные модели, методика определения которых в линейном приближении изложена в [1]. Первая работа, в которой рассмотрена возможность нахождения нелинейной динамической модели [2], дала методику решения задачи без доказательства сходимости метода Б. Г. Галеркина. В настоящей работе даются теоремы о сходимости метода.

Пусть уравнение связи имеет вид

$$L\varphi+K\varphi=f, \tag{1}$$

где $\varphi=\varphi(x)$ — входное воздействие; $x=x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — независимая переменная; $f=f(x)$ — выходная величина; при n переменных

$$L\varphi=(-1)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}\right]; \tag{2}$$

при одной переменной и четном порядке старшей производной

$$L\varphi=(-1)^m\frac{d^{2m}\varphi}{dx^{2m}}; \tag{3}$$

при нечетном порядке

$$L\varphi=(-1)^m\frac{d^{2m-1}\varphi}{dx^{2m-1}}. \tag{4}$$

Предположим, что φ и f непрерывны вместе со своими производными 1-го порядка в случае (2) и с производными до $(2m-1)$-го порядка в случае (3) и (4) в конечной области Ω с достаточно гладкой границей S; φ удовлетворяет следующим однородным (для простоты рассуждений) краевым условиям:

для (2)

$$\varphi/_S=0; \tag{5}$$

для (3)

$$x(a)=x'(a)=\ldots=x^{(m-1)}(a)=0;$$
$$x(b)=x'(b)=\ldots=x^{(m-1)}(b)=0; \tag{5'}$$

для (4)

$$
\begin{aligned}
&x(a) - x(b) = 0;\\
&x'(a) = x''(a) = \ldots = x^{(m-1)}(a) = 0;\\
&x'(b) = x''(b) = \ldots = x^{(m-1)}(b) = 0.
\end{aligned} \tag{5''}
$$

Будем считать φ и f известными. Найдем $K\varphi$ при n переменных в виде

$$K\varphi = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi^{k_i} + \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_3} a_{jl} (\varphi' x_l)^{k_j} \tag{6}$$

и при одной переменной в виде

$$K\varphi = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi^{k_i} + \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_3} a_{jl} \left(\varphi^{(k_l)}\right)^{k_j}, \tag{7}$$

считая, что m известно. Для этого надо найти a_i, a_{jl}, k_i, k_l, N_1, N_2, N_3. Примем для этого метод Галеркина, следуя [2], в каком-либо функциональном пространстве, например в $H[\Omega]$, в котором

$$(u, v) = \int_\Omega uv d\Omega, \tag{8}$$

или в пространстве $H_0[\Omega]$ [3], где

$$[u, v]_{H_0} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u'_{x_i} v'_{x_j} d\Omega. \tag{9}$$

Будем считать решение (1) с (5) приближенным и заданным для одномерного случая следующим образом:

$$\varphi_n = (x-a)^m (x-b)^m (b_0 + b_1 x + \ldots + b_N x^N), \tag{10}$$

т. е. удовлетворяющим однородным краевым условиям и разложенным по элементам базиса:

$$
\begin{aligned}
&u_1 = (x-a)^m (x-b)^m;\\
&u_2 = (x-a)^m (x-b)^m x;\\
&u_3 = (x-a)^m (x-b)^m x^2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_N = (x-a)^m (x-b)^m b^N.
\end{aligned}
$$

Подставив в (1) выражение (10) с учетом (3), (4), (7) и (8), получим скалярные произведения в H:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left[(-1)^m \frac{d^{2m}\varphi_N}{dx^{2m}} + \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_N^{k_i} + \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_3} a_{jl} \left(\varphi_N^{(k_l)}\right)^{k_j} - f \right] (x-a)^m (x-b)^m dx = 0;\\
&\int_a^b \left[(-1)^m \frac{d^{2m}\varphi_N}{dx^{2m}} + \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_N^{k_i} + \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_3} a_{jl} \left(\varphi_N^{(k_l)}\right)^{k_j} - f \right] (x-a)^m (x-b)^m x dx = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\int_a^b \left[(-1)^m \frac{d^{2m}\varphi_N}{dx^{2m}} + \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_N^{k_i} + \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_3} a_{jl} \left(\varphi_N^{(kl)}\right)^{k_j} - f \right] \times\\
&\qquad \times (x-a)^m (x-b)^m x^N dx = 0,
\end{aligned} \tag{11}
$$

где $N = N_1 + N_2 + N_3$. Проинтегрировав (11), получим систему уравнений, из которой можно найти a_i, a_{jl}, N_1, N_2, N_3 хотя бы по способу последовательных приближений. Для сходимости метода последовательных приближений в получающейся системе уравнений, а также и для сходимости метода Галеркина в (1) с (5) (либо с (5′) и (5″)) в каком-либо функциональном пространстве требуется полная непрерывность оператора

$$T\varphi = \int_{\Omega} G(x, P)(K\varphi - f)\, d\Omega \tag{12}$$

в этом пространстве, где $G(x, P)$ — функция Грина уравнения $L\varphi=0$ с теми же условиями (5), (5′), (5″), а также необходимо выполнение условий Липшица в том же пространстве для $T\varphi$ (например, для H_0)

$$\|T\varphi_p - T\varphi_q\|_{H_0} \leqslant \gamma\|\varphi_p - \varphi_q\|_{H_0}; \quad \gamma < 1.$$

Для уравнений (1) с (5) и $K\varphi$ в виде (6) в пространстве $H_0[\Omega]$

$$\gamma = \sqrt{\operatorname{mes}\Omega}\ \bar{G} N r a R^{r-1} M^r, \tag{13}$$

где $\operatorname{mes}\Omega$ — мера области Ω;

$$\bar{G} = \begin{cases} \sqrt{\int_{\Omega} [G'_{x_i}(x,P)]^2\, d\Omega} & \text{для } n \text{ переменных;} \\ \max\limits_{\Omega} |G(x,P)| & \text{для одной переменной;} \end{cases}$$

$P = P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — точка области Ω;

$$r = \max_{\Omega}\begin{Bmatrix} k_i \\ k_j \end{Bmatrix}; \quad a = \max_{\Omega}\begin{Bmatrix} |a_i| \\ |a_{ji}| \end{Bmatrix}; \quad \|\varphi\|_{H_0} \leqslant R;$$

M — наибольшая из постоянных в теоремах вложения С. Л. Соболева [4].

Пример. Пусть выходная величина изменяется по закону $f(x) = x$, а входная —

$$\varphi = -0{,}2514(x-1)x \tag{14}$$

при краевых условиях

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = 0. \tag{15}$$

Известно, что линейная часть $L\varphi$ описывается уравнением второго порядка. Проверим сначала, не подойдет ли линейная динамическая модель, т. е.

$$\varphi'' + a_1\varphi + a_{11}\varphi' = -x. \tag{16}$$

По методу Галеркина составим систему уравнений для определения a_1 и a_{11} в $H[\Omega]$:

$$\int_0^1 [-2\cdot 0{,}2514 + a_1(x^2-x)(-0{,}2514) + a_{11}(2x-1)(-0{,}2514) + x] \times$$
$$\times (x^2 - x)\, dx = 0; \tag{17}$$
$$\int_0^1 [-2\cdot 0{,}2514 + a_1(x^2-x)(-0{,}2514) + a_{11}(2x-1)(-0{,}2514) + x] \times$$
$$\times (x^2 - x)\, x dx = 0.$$

Отсюда $a_1=0{,}053$; $a_{11}=-7{,}947$. Подставив a_1 и a_{11} в (6), а затем $K\varphi=a_1+a_{11}\varphi'$ в (1), сможем оценить разность между левой и правой частями (1) в каком-либо пространстве. Это позволит решить вопрос о том, подходит ли полученная модель. Но мы предположим другой критерий оценки пригодности полученных моделей. Используя (13) проверяем выполнение условий Липшица

$$\gamma = 1\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 7{,}947\cdot 0{,}316 = 5{,}03 > 1,$$

где mes $[0,1]=1$; $\max\left|\begin{matrix}|a_i|\\|a_{jl}|\end{matrix}\right| = 7,947$;

$$G(x,P) = \begin{cases} x(1-p) & \text{при } x<p; \\ p(1-x) & \text{при } x \geqslant p; \end{cases}$$

$$N = 1+1=2; \qquad \overline{G} = \max_{[0,1]} |G|(x,p)| = 1;$$

$$r=1; \quad M = \frac{\|\varphi\|_H}{\|\varphi\|_{H_0}} = 0,316; \qquad \gamma > 1.$$

Поэтому линейная модель не подходит. Выбираем простейшую нелинейную модель вида

$$\varphi'' + a_2\varphi^2 = x. \tag{18}$$

Уравнение по Галеркину для отыскания a^2 примет вид

$$\int_0^1 [-2\cdot 0,2514 + a_2(-0,2514)^2(x^2-x)^2](x^2-x)\,dx = 0.$$

Отсюда $a_2 = 1,0092 \approx 1$, т. е. уравнение (18) можно представить

$$\varphi'' + \varphi^2 = x. \tag{19}$$

Условие Липшица для уравнения (18) с $a_2=1$, $\varphi=-0,2514\ (x^2-x)$ дает $\gamma = 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$, что является достаточным для сходимости метода Галеркина. Возникает вопрос, когда обратная краевая задача, задача нахождения $K\varphi$, имеет решение и притом единственное, а метод Галеркина для нее сходится в выбранных пространствах. Чтобы ответить на этот вопрос, следует ввести оператор AK, определив его:

$$AK = K - T(K\varphi), \tag{20}$$

где $T(K\varphi) = T\varphi$ [см. (12)]. Оператор AK удовлетворяет в H_0 условиям Липшица, причем для одномерного случая $\gamma = \sqrt{[1-2|G|M + |G|^{-2}](b-a)}$, для n-мерного случая $\gamma = \||G|-1|\,M\sqrt{\operatorname{mes}\Omega}$. Если $2k_i$, $2k_j$, $2k_l$ таковы, что удовлетворяют теоремам вложения С. Л. Соболева [4], то оператор $K\varphi$ удовлетворяет в пространстве H условиям:

$$\|K\varphi\| \leqslant A\|\varphi\| + B\left\|\sum_{l=1}^{n}\varphi'_{x_l}\right\| + C \tag{21}$$

в n-мерном случае, или

$$K\varphi\| \leqslant A\|\varphi\| + B \tag{21'}$$

в одномерном случае, где $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $C \geqslant 0$ постоянные, не зависящие от выбора φ. Доказательства теорем осуществляются с использованием теорем вложения С. Л. Соболева [4]. Как показано в [5], выполнение условий (21) или (21′) обеспечивает полную непрерывность оператора $T\varphi$ в H_0, а выполнение условий Липшица с $\gamma<1$ обеспечивает существование и единственность решения уравнения (1) с (5) [(5′) или (5″)] в выбранном пространстве для нахождения $K\varphi$ по теореме М. А. Красносельского [6]. При этом важно уметь определять, когда k_i, k_j, k_l удовлетворяют условиям теорем вложения С. Л. Соболева. Для этого существуют таблицы, опубликованные в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. O. Osburn. Inverse Simulation.— Instruments and Control Systems, 1967, № 4.
2. В. И. Петухов, Э. И. Кучеренко. Обратная нелинейная динамическая модель.— Информационно-измерительная техника. Труды РРТИ. Рязань, 1970.
3. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
4. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Э. И. Кучеренко. О сходимости метода Галеркина для нелинейных дифференциальных уравнений II порядка эллиптического типа.— В сб. аспирантских работ КГУ. Точные науки. Казань, 1962.
6. М. А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
7. Э. И. Кучеренко. О двух комбинированных методах интегрирования дифференциальных уравнений.— В тематическом сб. статей по дифференциальным уравнениям. Труды РРТИ. Рязань, 1968.

Поступила в редакцию
23 октября 1970 г.,
окончательный вариант —
24 июня 1971 г.