А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 1 1972

УДК 621.317 + 519.21

К. А. РЕЗНИК
(Ленинград)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ НОРМИРОВАНИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

В ряде случаев погрешность средства измерения представляют в виде предельно допустимого значения (δ_t), которое практически не должно быть превышено алгебраической суммой систематической и случайной составляющих погрешности у любого из приборов данного типа. Последнее означает, что вероятность такого события (q) должна быть пренебрежимо мала. Систематическая погрешность, будучи постоянной для отдельного прибора данного типа при неизменных условиях, изменяется от прибора к прибору. Поэтому при изучении ансамбля приборов систематическая погрешность становится случайной величиной.

Общая погрешность одного прибора равна $\delta_0 = \delta_s + \delta_r$, где δ_s — систематическая погрешность; δ_r — случайная погрешность. Распределение общей погрешности по ансамблю приборов следует искать как композицию двух распределений. Однако это большей частью невыполнимо, так как неизвестны точные законы распределения составляющих. В то же время на основе изучения ограниченной совокупности приборов ($n=50\div100$) достаточно просто можно вычислить оценки первых четырех моментов распределения общей погрешности или ее составляющих. Нетрудно показать, что формы распределения погрешностей ансамблей измерительных приборов одномодальны и могут быть оценены при помощи асимметрии и эксцесса. Это дает основание построить теоретическую модель распределения погрешностей ансамбля измерительных приборов, форма которой полностью определяется первыми четырьмя моментами. В [1, 2] для плотности симметричного распределения предлагалось следующее выражение:

$$f_0(x,\lambda,k) = \frac{1}{2\,(2\lambda^2)^{1/k}\,\Gamma(1+1/k)} \exp\left\{-\frac{|x|^k}{2\lambda^2}\right\}, \quad (1)$$

где $2\lambda^2$ и k — параметры распределения; $\Gamma(y)$ — гамма-функция. В [2] показано, как следует модифицировать плотность (1) для симметричных распределений. Параметры $2\lambda^2$ и k определяются дисперсией и эксцессом распределения (M_2 и Э):

$$(2\lambda^2)^{2/k} = M_2 \frac{\Gamma(1/k)}{\Gamma(3/k)}; \quad (2)$$

$$Э = \frac{\Gamma(1/k)\,\Gamma(5/k)}{\Gamma^2(3/k)}. \quad (3)$$

Таким образом, вычислив оценки дисперсии и эксцесса, можно затем вычислить параметры распределения (1). Выбор в качестве теоретической модели для распределения погрешностей ансамблей приборов выражения (1) объясняется его свойствами.

Первое свойство состоит в том, что это распределение является частным случаем из класса распределений, характеризуемых максимумом энтропии, общая форма которых

$$f(x) = \exp[\alpha_0 + \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x) + \ldots] \qquad (4)$$

приведена в [3]. Для данного распределения это свойство можно сформулировать следующим образом.

Среди всех распределений с заданным абсолютным моментом порядка k наибольшей энтропией обладают распределения с плотностью вида (1).

Абсолютный момент порядка k распределения (1) равен

$$M_k = 2\lambda^2 \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{2\lambda^2}{k} \qquad (5)$$

и также полностью определяется дисперсией и эксцессом. Действительно, для любого заданного M_2 и Э можно по формулам (2) и (3) вычислить $2\lambda^2$ и k, а следовательно, и M_k. Поэтому, если у двух распределений типа (1) равны M_2 и Э, то обязательно будут равны и моменты порядка k.

Второе свойство модели (1), отмеченное в [2], состоит в том, что ее частными случаями являются такие стандартные законы распределения, как нормальный, двойной экспоненциальный и равномерный. При этом двойное экспоненциальное распределение имеет наибольшую энтропию среди всех распределений с заданным абсолютным моментом первого порядка; нормальное — среди распределений, у которых равны дисперсии; равномерное — среди распределений, сосредоточенных на заданном конечном интервале.

Третье свойство модели (1) состоит в том, что распределения этого типа, обладающие большей энтропией, дают при одном и том же нормированном отклонении t большую вероятность $q(t)$ события, состоящего в том, что погрешность δ_0 превысит предельно допустимое значение δ_t

$$q(t) = 2\int_t^{\infty} f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Докажем справедливость последнего утверждения. Для случайных величин с распределением типа (1) энтропия определяется следующим образом:

$$H[X] = -\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) \log_a [f_0(x)]\,dx = \log_a [2(2\lambda^2)^{1/k}\Gamma(1+1/k)] \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)\,dx + \frac{\log_a e}{2\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f_0(x)\,dx. \qquad (7)$$

Учтем, что $\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)\,dx = 1$, а $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f_0(x)\,dx = M_k$. Тогда используя уравнение (5), имеем

$$H[X] = \log_a [2(2\lambda^2)^{1/k}\Gamma(1+1/k)] + \frac{\log_a e}{k}, \qquad (8)$$

где a — основание логарифма; e — основание натурального логарифма. Из уравнения (8) видно, что с уменьшением k энтропия распределения возрастает. В то же время интеграл

$$q(t, \lambda, k) = \frac{1}{\Gamma(1 + 1/k)} \int_{t}^{\infty} \exp\left\{-\frac{|x|^k}{2\lambda^2}\right\} d\left[\frac{x}{(2\lambda^2)^{1/k}}\right] \qquad (9)$$

заменой переменных $y = |x|^k/2\lambda^2$ приводится к неполной гамма-функции $\Gamma(1/k;\ t)$, которая при одном и том же t имеет тем большее значение, чем больше $1/k$ [4]. Последнее соответствует возрастанию q с ростом эксцесса при постоянном t.

Из изложенного можно сделать вывод о том, что при $H[X] > H[Y]$

$$q_X[t] > q_Y[t]. \qquad (10)$$

Последнее означает, что для распределений типа (1) энтропия как мера неопределенности соответствует другой мере неопределенности — нормированному отклонению $t(q)$.

Изложенные выше свойства распределения (1) позволяют проследить зависимость предельной погрешности δ_t от формы распределения общей погрешности по ансамблю приборов данного типа. Предельно допустимое значение общей погрешности

$$\delta_t = t\,(\lambda^2)^{1/k}. \qquad (11)$$

Если сравниваемые распределения имеют одинаковые параметры λ, то, согласно (9), с ростом эксцесса при выбранной вероятности q будет возрастать нормированное отклонение. На рис. 1 показано семейство кривых, характеризующих зависимость $t(Э, q)$.

При нормальном распределении $\lambda = \sigma$, где σ — среднеквадратическое отклонение. Это распределение наиболее полно изучено и используется во всех руководствах по математической статистике и теории погрешностей измерений. Поэтому принято выражать предельное допустимое значение погрешности для любого вида распределения в следующей форме:

$$\delta_t = t_0 \sigma. \qquad (12)$$

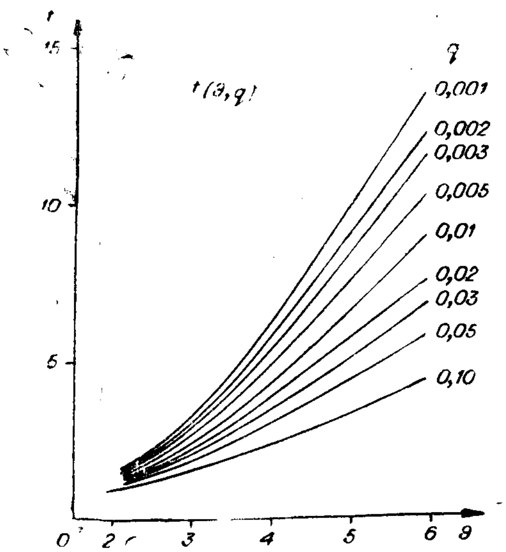

Рис. 1.

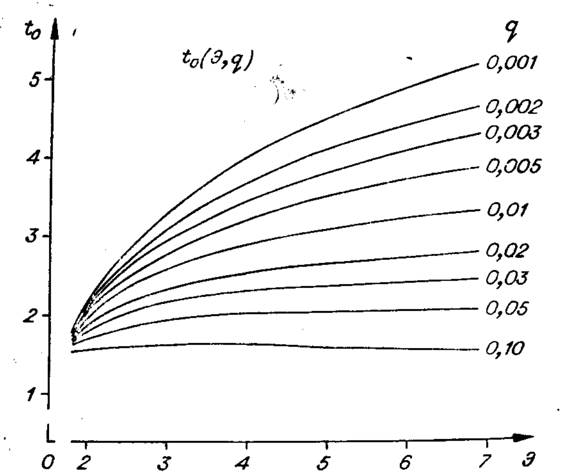

Рис. 2.

Такая форма выражения предельной погрешности обладает еще и тем преимуществом, что оценку σ легко вычислить. Используя (2) и (11), получим, что

$$t_0 = t \cdot 2^{-\frac{1}{k}} \left[\frac{\Gamma(1/k)}{\Gamma(3/k)}\right]^{1/2}.$$

На рис. 2 показана зависимость $t_0(Э, q)$. Для расчета t и t_0 следует использовать оценки $\widetilde{M}_2$ и $\widetilde{Э}$, вычисленные по достаточно большому числу экспериментальных данных ($n > 50$).

Из изложенного видно, что предельно допустимое значение погрешности определяется в конечном счете дисперсией и эксцессом распределения общей погрешности для ансамбля приборов определенного типа. Это значение должно быть назначено так, чтобы вероятность

$$P\{|\delta_0| > |\delta_t|\} \leqslant q$$

была достаточно малой величиной. Последнее позволяет свести действия поверителя приборов к отбраковке тех приборов, для которых неравенство $|\delta_0| \leqslant |\delta_t|$ не выполняется. Это означает, что δ_t несет достаточную для решения практических вопросов контроля качества информацию о погрешностях приборов. В то же время средняя квадратическая погрешность не содержит достаточно информации для разработки столь же простого алгоритма действий. Задание дисперсии всегда должно быть дополнено заданием эксцесса или другого параметра, характеризующего форму распределения.

Следует заметить, что, используя изложенное в [2], можно перенести содержание данной работы на распределения асимметричной формы.

Свойства распределения (1) можно также использовать для определения максимального значения результирующей погрешности измерения по известным составляющим. В этом случае следует вычислить дисперсию и эксцесс распределения суммарной погрешности по известным дисперсиям и эксцессам составляющих. Для независимых случайных величин дисперсия суммы

$$M_{2\Sigma} = M_{21} + M_{22} + M_{23} + \ldots + M_{2l}, \tag{13}$$

где M_{21}, M_{22}, M_{23}, ..., M_{2l} — дисперсии составляющих. Четвертый момент суммы тех же величин равен

$$M_{4\Sigma} = M_{41} + M_{42} + M_{43} + \ldots + M_{4l} + 6M_{21}M_{22} + \\ + 6M_{21}M_{23} + \ldots + 6M_{21}M_{2l} + 6M_{22}M_{2l} + \ldots + 6M_{22}M_{2l} + \ldots \tag{14}$$

Форма распределения суммарной погрешности определяется соответствующим экцессом

$$Э_\Sigma = \frac{M_{4\Sigma}}{M_{2\Sigma}^2}. \tag{15}$$

Если имеется только две составляющих погрешности, то, подставив (13) и (14) в (15), получим

$$Э_\Sigma = \frac{Э_1 + Э_2(M_{22}/M_{21}) + 6M_{22}/M_{21}}{(1 + M_{22}/M_{21})^2}. \tag{16}$$

Зная $Э_\Sigma$ и $M_{2\Sigma}$ и задавшись вероятностью q, можно, пользуясь графиками на рис. 2, найти t_Σ.

ВЫВОДЫ

Нормирование предельно допустимого значения погрешности является предпочтительным перед нормированием среднеквадратического отклонения, так как позволяет проводить контроль качества средств измерений без дополнительных сведений о форме распределения погрешностей.

Энтропия и нормированное отклонение являются двумя мерами, характеризующими рассеяние показаний средств измерения. Обе эти меры можно использовать для сравнения по точности ансамблей приборов различных типов. Используя изложенное в статье, можно переходить от одной меры сравнения к другой.

Используя оценки дисперсии и эксцесса, можно вычислить предельное значение общей погрешности измерения по ее составляющим без построения композиции распределений.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. В. Новицкий. Основы информационной теории измерительных устройств. Л., «Энергия», 1968.
2. К. А. Резник. Об одной модели распределения погрешностей ансамблей измерительных приборов. — Автометрия, 1970, № 5.
3. А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао. Характеризационные задачи математической статистики. М., «Наука», 1971.
4. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
18 декабря 1970 г.