

В. А. АРБУЗОВ, В. А. ФЕДОРОВ

(Новосибирск)

ВЛИЯНИЕ РАСФОКУСИРОВКИ НА СВОЙСТВА ОПТИЧЕСКОГО ФИЛЬТРА ВЫСОКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Основные компоненты оптических систем обработки информации (линзы, дифракционные решетки, диафрагмы, аподизованные объективы и т. д.) являются фильтрами низких пространственных частот. Возможности упомянутых систем могут быть заметно расширены, если в них применять оптические фильтры высоких пространственных частот (ФВЧ), т. е. фильтры, модуль пространственно-частотной характеристики $H(f)$ которых в полосе $0 - f_{\max}$ частот f монотонно возрастает.

В [1] описан некогерентный фотохромный ФВЧ, схема которого изображена на рис. 1. Основными элементами этого фильтра являются: транспарант 1 с предъявляемым изображением, коаксиальный светофильтр 2, 3 из красного и синего цветного стекла, объектив 4 и пленка фотохромного материала 6. Символом Π_1 обозначен диффузный световой поток от ртутной лампы. Как уже отмечалось, принцип действия такого устройства предусматривает обязательную расфокусировку системы. При этом уменьшение расфокусировки увеличивает полосу пропускания («дифференцирования») ФВЧ. В данной работе устройство, изображенное на рис. 1, анализируется с позиций волновой оптики с целью определения пространственно-частотных характеристик (ПЧХ) при всех (включая и нулевую) расфокусировках.

Анализируемое устройство может быть представлено в виде параллельного соединения двух оптических фильтров. Первый фильтр представляет собой оптическую расфокусированную систему с кольцевой апертурой, а второй — оптическую расфокусированную диафрагмированную систему. При этом предполагается, что в обоих фильтрах используются части (кольцо, круг) одного и того же объектива.

В связи с тем, что выходной сигнал обоих фильтров регистрируется на «бистабильном» фотоматериале [1] (фотохромный материал), ПЧХ

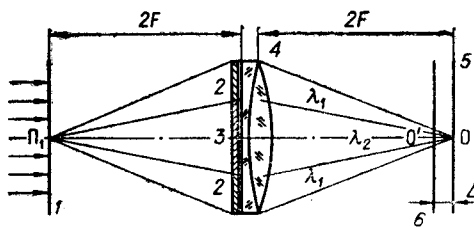


Рис. 1.

рассматриваемого устройства пропорциональна разности

$$\dot{H}(f) = \gamma [H^{(1)}(f) - H^{(2)}(f)], \quad (1)$$

где $\gamma = \frac{9}{16}$ — коэффициент нормировки функции $\dot{H}(f)$, вытекающий из результатов [1]; $H^{(1)}(f)$ — нормированная ПЧХ низкочастотного фильтра с кольцевой апертурой при заданном отношении $\eta = D_1/D_2$; D_1 — внутренний диаметр кольцевого светофильтра 2 (см. рис. 1); D_2 — внешний диаметр кольцевого светофильтра, равный диаметру используемого объектива; $H^{(2)}(f)$ — нормированная ПЧХ низкочастотного диафрагмированного фильтра с диаметром выходного зрачка D_1 .

Функции $H^{(i)}$, входящие в выражение (1), вычисляются как автокорреляция комплексной функции выходного зрачка объектива [2, 3]. По определению, обе оптические системы характеризуются функцией выходного зрачка, обладающей свойством круговой симметрии. Поэтому ПЧХ этих систем обладают таким же свойством, т. е. зависят только от одной пространственной частоты s [см. (3)]:

$$\dot{H}^{(i)}(s) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}_i \left(x + \frac{s_i}{2}, y \right) \dot{P}_i^* \left(x - \frac{s_i}{2}, y \right) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{P}_i(x, y)|^2 dx dy}, \quad (2)$$

где $\dot{P}_i(x, y) = |P_i(x, y)| \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda_i} W(x, y)\right)$ — комплексная функция выходного зрачка i -й системы; $|P_i(x, y)|$ — коэффициент пропускания объектива по амплитуде i -й системы; (x, y) — прямоугольные координаты, нормированные на краях

выходного зрачка с диаметром D_2 так, что выполняется равенство $x^2 + y^2 = 1$; $\frac{2\pi}{\lambda_i} W(x, y)$ — фазовая ошибка в точке (x, y) выходного зрачка объектива; $s_i = \frac{\lambda_i}{\sin \alpha} f$ — нормированная пространственная частота (рис. 2);

$$s = s_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} s_2; \quad (3)$$

λ_i — длины волн излучений воздействующих на бистабильный

фотоматериал. В рассматриваемом случае функции $P_i(x, y)$ имеют вид:

$$\dot{P}_1(x, y) = \begin{cases} C_1 \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda_1} w(x^2 + y^2) \right]; & \eta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0; & x^2 + y^2 < \eta^2; x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \quad (4)$$

$$\dot{P}_2(x, y) = \begin{cases} C_2 \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda_2} w(x^2 + y^2) \right]; & x^2 + y^2 \leq \eta^2; \\ 0; & x^2 + y^2 > \eta^2, \end{cases} \quad (5)$$

где w — оптическое расстояние между фазовыми фронтами φ_0 и φ^i

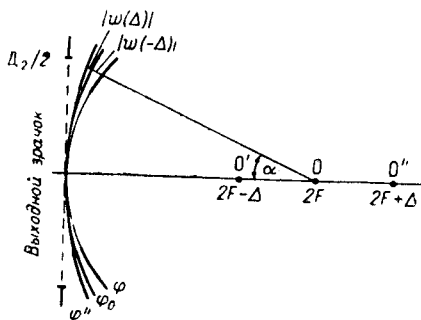


Рис. 2.

вдоль луча, соединяющего край объектива с фокальной точкой 0 безаберрационного объектива (см. рис. 2); C_2, C_1 — приведенные амплитудные коэффициенты пропускания светофильтров 2 и 3 (см. рис. 1), учитывающие их коэффициенты пропускания k_i по интенсивности, чувствительность $\varepsilon(\lambda_i)$ фотоматериала и энергию излучения $E(\lambda_i)$ источника; $C_1^2 = \varepsilon(\lambda_1) k_1 E(\lambda_1)$; $C_2^2 = \varepsilon(\lambda_2) k_2 E(\lambda_2)$.

Нормировочный член в выражении (2) с учетом соотношений (4) и (5) соответственно равен:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{P}_1(x, y)|^2 dx dy = C_1^2 \pi (1 - \eta^2); \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{P}_2(x, y)|^2 dx dy = C_2^2 \pi \eta^2.$$

Для рассматриваемого ФВЧ, использующего линейный бистабильный фотоматериал и имеющий ПЧХ с нулевым коэффициентом передачи на нулевой частоте, справедливо соотношение

$$\mu(1 - \eta^2) = \pi \eta^2, \quad (6)$$

где $\mu = \frac{C_1^2}{C_2^2}$.

Подынтегральное выражение в числителе соотношения (2) можно представить с учетом формул (4), (5) в виде

$$\dot{P}_i\left(x + \frac{s_i}{2}, y\right) \dot{P}_i^*\left(x - \frac{s_i}{2}, y\right) = C_i^2 \exp(jax), \quad (7)$$

где $a = \frac{4\pi}{\lambda_1} \omega s$.

Подставляя (7) в (2), получаем [с учетом нормировки (6)]:

$$\dot{H}^{(1)}(s) = \frac{\mu}{\pi \eta^2} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_1} \exp(jax) dx dy; \quad (8)$$

$$\dot{H}^{(2)}(s) = \frac{1}{\pi \eta^2} \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_2} \exp(jax) dx dy, \quad (9)$$

где символы Ω_i обозначают область интегрирования (рис. 3, а, б). Подынтегральная функция в (8) и (9) зависит только от переменной x . Область Ω_i симметрична относительно оси Ox . Поэтому (8) и (9) могут быть представлены в следующей форме:

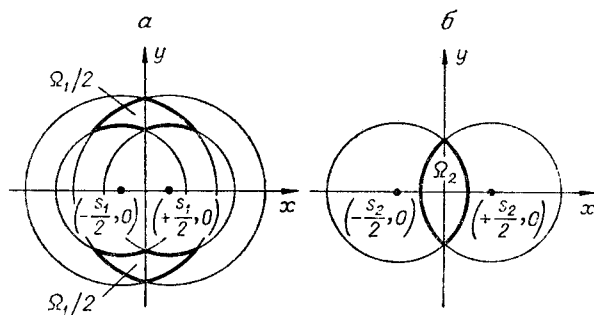


Рис. 3.

$$\begin{aligned} \dot{H}^{(1)}(s) = & \frac{4\mu}{\pi\eta^2 a} \left[\int_M^N \sin a \left(\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}s \right) dy - \int_R^{\tau} \sin a \left(\sqrt{\eta^2-y^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2}s \right) dy - \int_Q^{\eta} \sin a \left(\sqrt{\eta^2-y^2} - \frac{1}{2}s \right) dy \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{где } M = & \sqrt{1 - \left(\frac{1-\eta^2}{2s} + \frac{s}{2} \right)^2}; \quad N = \sqrt{1 - \frac{s^2}{4}}; \quad R = \\ = & \sqrt{\eta^2 - \left(\frac{1-\eta^2}{2s} - \frac{s}{2} \right)^2}; \quad Q = \sqrt{\eta^2 - \frac{s^2}{4}}; \quad 1 - \eta_1 \leq s \leq \sqrt{1 - \eta^2}; \end{aligned}$$

$$\dot{H}^{(2)}(s) = \frac{4}{\pi\eta^2 a} \int_0^L \sin a \left(\sqrt{\eta^2-y^2} - \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} s \right) dy, \quad (11)$$

$$\text{где } L = \sqrt{\eta^2 - \left(\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} s \right)^2}; \quad 0 \leq s \leq \frac{2\lambda_1}{\lambda_2} \eta.$$

Для того чтобы сложные подынтегральные функции в выражениях (10) и (11) представить в виде, удобном для разложения по функциям Бесселя

$$\cos(B \cos \beta) = J_0(B) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(B) \cos 2n\beta; \quad (12)$$

$$\sin(B \cos \beta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n+1}(B) \cos(2n+1)\beta, \quad (13)$$

в выражении (10) делается замена $\sqrt{1-y^2} = \cos \theta$, $\sqrt{\eta^2-y^2} = \eta \cos \varphi$, а в выражении (11) замена $\sqrt{\eta^2-y^2} = \eta \cos \psi$. Используя соотношение $\sin[B(\cos \beta \pm t)] = \sin(B \cos \beta) \cos(Bt) \pm \sin(Bt) \cos(B \cos \beta)$ и делая указанные выше замены, получаем

$$\begin{aligned} \dot{H}^{(1)}(s) = & \frac{4\mu}{\pi\eta^2 a} \left\{ \cos\left(\frac{as}{2}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(a \cos \theta) \cos \theta d\theta - \sin\left(\frac{as}{2}\right) \times \right. \\ & \times \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(a \cos \theta) \cos \theta d\theta - \eta \cos\left(\frac{as}{2}\right) \left[\int_{\varphi_1}^{\pi/2} \sin(a \eta \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi + \right. \\ & \left. + \int_{\varphi_2}^{\pi/2} \sin(a \eta \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \right] - \eta \sin\left(\frac{as}{2}\right) \left[\int_{\varphi_1}^{\pi/2} \cos(a \eta \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi - \right. \\ & \left. - \int_{\varphi_2}^{\pi/2} \cos(a \eta \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \right] \}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1 = & \arccos \left[\cos \left(\frac{1-\eta^2}{2s} + \frac{s}{2} \right) \right]; & \varphi_1 = & \arccos \left[\frac{1}{\eta} \left(\frac{1-\eta^2}{2s} - \frac{s}{2} \right) \right]; \\ \theta_2 = & \arccos \left(\frac{s}{2} \right); & \varphi_2 = & \arccos \left(\frac{s}{2\eta} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{H}^{(2)}(s) = & \frac{4}{\pi \eta a} \cos\left(\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} as\right) \int_0^{\psi_1} \sin(a\eta \cos \psi) \cos \psi d\psi - \frac{4}{\pi \eta a} \sin\left(\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} as\right) \\ & \times \int_0^{\psi_1} \cos(a\eta \cos \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\psi_1 = \arccos\left(\frac{\lambda_2}{2\lambda_1 \eta} s\right).$$

Вычисляя интегралы, входящие в (14), (15), с использованием соотношений (12), (13) окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \dot{H}^{(1)}(s) = & \frac{4\mu}{\pi \eta^2 a} \left\{ \cos\left(\frac{as}{2}\right) \left[J_1(a)(\theta_2 - \theta_1) - \eta J_1(\eta a) (\pi - \varphi_2 - \varphi_1) \right] + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\sin 2n\theta_2 - \sin 2n\theta_1}{2n} \right) [J_{2n-1}(a) - J_{2n+1}(a)] + \\ & + \eta \frac{\sin 2n\varphi_2 + \sin 2n\varphi_1}{2n} [J_{2n-1}(\eta a) - J_{2n+1}(\eta a)] \left. - \sin\left(\frac{as}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \right. \\ & \times \left(\frac{\sin(2n+1)\theta_2 - \sin(2n+1)\theta_1}{2n+1} [J_{2n}(a) - J_{2(n+1)}(a)] + \right. \\ & \left. + \eta \frac{\sin(2n+1)\varphi_2 - \sin(2n+1)\varphi_1}{2n+1} [J_{2n}(\eta a) - J_{2(n+1)}(\eta a)] \right\}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}^{(2)}(s) = & \frac{4}{\pi \eta a} \left[\cos\left(\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} as\right) \left\{ J_1(\eta a) \psi_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 2n\psi_1}{2n} \right\} \times \right. \\ & \times [J_{2n-1}(\eta a) - J_{2n+1}(\eta a)] - \frac{4}{\pi \eta a} \sin\left(\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} as\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)\psi_1}{2n+1} \times \\ & \left. \times [J_{2n}(\eta a) - J_{2(n+1)}(\eta a)] \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где J_m — функция Бесселя 1-го рода m -го порядка; $a = \frac{1\pi}{\lambda_1} \omega s$. ПЧХ рассматриваемых систем при нулевой расфокусировке (найденные как предел функции $\dot{H}^{(1)}(s)$ при $\omega \rightarrow 0$) выражаются соотношениями:

$$\dot{H}^{(1)}(s) = \frac{1}{\pi(1-\eta^2)} [2(\theta_2 - \theta_1) - (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) - 2\eta^2(\pi - \varphi_2 - \varphi_1) - \eta^2(\sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_1)]; \quad (18)$$

$$\dot{H}^{(2)}(s) = \frac{1}{\pi} (2\psi_1 - \sin 2\psi_1). \quad (19)$$

Значения функции $\dot{H}^{(1)}$ для иных интервалов изменения частоты можно определить из выражений (16) и (18). При этом в зависимости от интересующего интервала для s параметры θ_1 , θ_2 , φ_1 , φ_2 вычисляются по формулам (20). Параметр ψ_1 , используемый в (17), (19), определяется из (21).

$$\theta_1 = \begin{cases} \arccos \left(\frac{1-\eta^2}{2s} + \frac{s}{2} \right); & 1-\eta \leq s \leq 1+\eta; \\ 0; & 0 < s < 1-\eta; \quad s > 1+\eta; \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \arccos \left(\frac{s}{2} \right); & 0 \leq s \leq 2; \\ 0; & s > 2; \end{cases} \quad (20)$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} \arccos \left[\frac{1}{2\eta} \left(\frac{1-\eta^2}{s} - s \right) \right]; & 1-\eta \leq s \leq 1+\eta; \\ 0; & 0 < s < 1-\eta; \quad s > 1+\eta; \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \arccos \left(\frac{s}{2\eta} \right); & 0 \leq s \leq 2\eta; \\ 0; & s > 2\eta; \end{cases}$$

$$\psi_1 = \begin{cases} \arccos \left(\frac{\lambda_2}{2\eta\lambda_1} s \right); & 0 \leq s \leq \frac{2\lambda_1}{\lambda_2} \eta; \\ 0; & s > \frac{2\lambda_1}{\lambda_2} \eta. \end{cases} \quad (21)$$

Для оценки ПЧХ анализируемого устройства при всех значениях расфокусировки, а также для дополнительной проверки результатов, полученных в [1], соотношения (16)–(19) были использованы для численных расчетов ПЧХ на вычислительной машине. При этом значение отношения $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, использованного в расчетах, было взято равным 1,5 в соответствии с реально существующим соотношением длин волн λ_1 и λ_2 «отбеливающих» и «чернящих» излучений, воздействующих на фотохромный материал ($\lambda_1 \approx 600$ нм, $\lambda_2 \approx 400$ нм). Расчеты были проведены для следующих значений параметра расфокусировки $\omega = 0; 0,2\lambda_1; \nu\lambda_1$ ($\nu = 0,5; 1; 2; 5; 10; 20; 50$) и параметра η , равного 0,5.

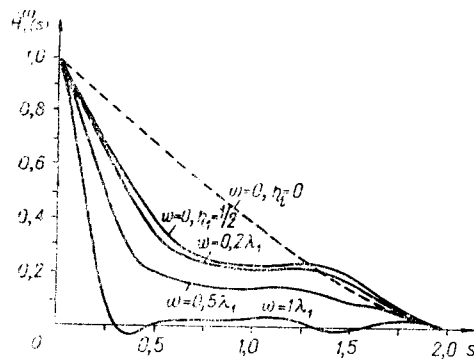


Рис. 4.

Графики, приведенные на рис. 4 и 5, показывают характер изменения пространственно-частотной характеристики оптической системы с кольцевой апертурой при вариациях параметра ω , который связан с параметром сдвига Δ соотношением (см. рис. 1 и 2)

$$\omega = -2F - \Delta \cos \alpha - \sqrt{(2F)^2 + F\Delta + \Delta^2 \cos^2 \alpha}$$

при положительных сдвигах плоскости b относительно фокальной плоскости b . При отрицательных сдвигах

$$\omega = -2F + \Delta \cos \alpha + \sqrt{(2F)^2 - 4F\Delta + \Delta^2 \cos^2 \alpha}.$$

Для сравнения на рис. 4 приведена (штриховая линия) ПЧХ оптической системы с круглой апертурой и диаметром выходного зрачка D_2 .

На рис. 6, а, б изображены результирующие ПЧХ исследуемого ФВЧ при различных параметрах расфокусировки. Там же для сравнения при-

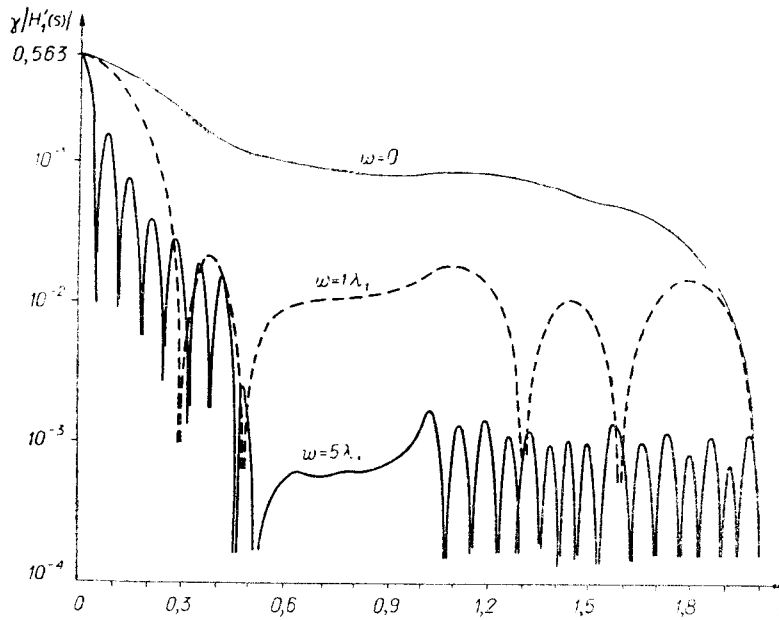


Рис. 5.

веден график ПЧХ идеального устройства, вычисляющего лапласиан (график «и»), а также график функции $H_1(f)$, полученной в [1]. Из рисунка видно, что ПЧХ, вычисленная по дифракционной теории при $\omega \geq 10\lambda_1$, совпадает с функцией $H_1(f)$, найденной ранее в приближении геометрической оптики. Следует иметь в виду, что масштабный коэффициент n на оси частот s (см. рис. 6) для расфокусировок $0 < \omega < 0,5\lambda_1$ равен 0,5. Для расфокусировок $\omega = \nu\lambda_1 > 0,5\lambda_1$ коэффициент n принимает значения ν .

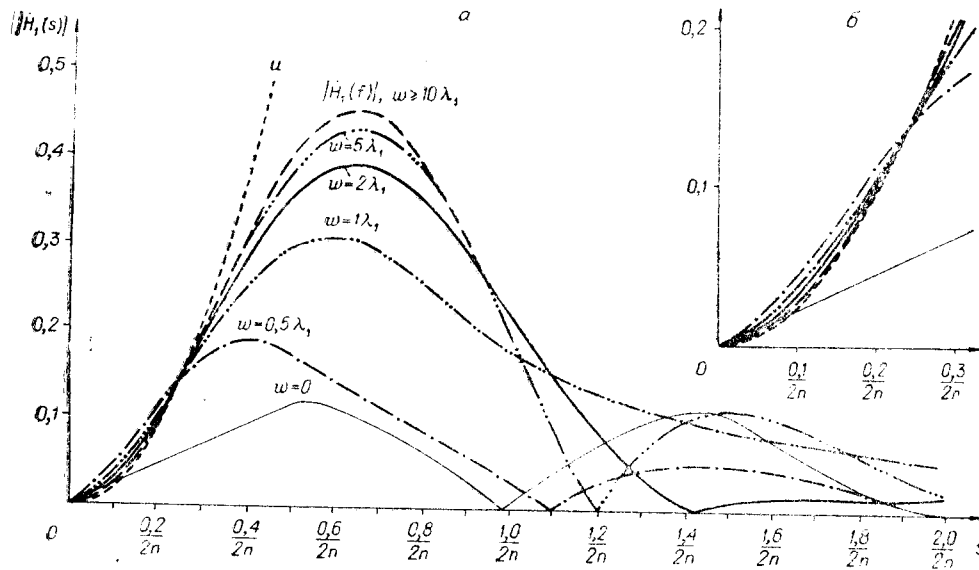


Рис. 6.

Начальный участок ПЧХ рассматриваемого оптического устройства при всех расфокусировках (включая и нулевую) имеет монотонно возрастающий характер. Ширина интервала частот (полоса пропускания ФВЧ), соответствующая этому участку, с уменьшением расфокусировки ($\omega \rightarrow \lambda_1$) растет в масштабе $1/\nu$. При дальнейшем уменьшении расфокусировки ($\omega \rightarrow 0$) полоса пропускания растет медленнее, асимптотически стремясь к величине $s_{\max} = 0,5$. Такое устройство вычисляет лапласиан от входных сигналов-изображений при расфокусировках $\omega \geq 0,5 \lambda_1$ в полосе частот $0 - \frac{0,3}{2\pi}$. При нулевых расфокусировках система вычисляет в полосе $0-0,5$ модуль градиента ($|\text{grad } U| = \sqrt{\nabla^2 U}$). При $0 < \omega < 5\lambda_1$ вычисляется нечто среднее между ними.

Полученные формулы (16)—(19) позволяют вычислять ПЧХ исследуемого устройства и в случае, когда в нем используется объектив с хроматической aberrацией.

Следует также отметить, что полученное аналитическое выражение ПЧХ расфокусированной оптической системы с кольцевой апертурой представляет и самостоятельный интерес. Из выражения (16), как частные случаи, можно получить результаты работ [2, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Арбузов, В. А. Козенков, В. А. Федоров. Пространственно-частотные характеристики оптического устройства, выделяющего контуры изображений.— *Автоматика*, 1971, № 1.
2. H. H. Hopkins. The Frequency Response of a Defocused optical System.— *Proc of the Royal Society, Series A*, 1955, v. 231, № 1184.
3. A. Stokseth. Properties of a Defocused Optical System.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1969, № 10.
4. O'Neill. Transfer Function for an Annular Aperature.— *J. Opt. Soc. Amer.*, 1956, № 4.

*Поступила в редакцию
24 февраля 1971 г.*