А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 6 1971

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И УСТРОЙСТВА ВОСПРИЯТИЯ И ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

УДК 53.08+535.853

В. М. ЕФИМОВ, А. М. ИСКОЛЬДСКИЙ, Д. Г. ФРИЗЕН

(Новосибирск)

О ФЛЮКТУАЦИЯХ КОНТРАСТА В ПОРОГОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ

В классической теории оптических передающих систем предполагается, что распределение освещенности в плоскости изображения является неслучайной функцией пространства, заданной в области, ограниченной размерами изображения. Это допущение позволяет рассматривать оптическую систему как пассивный фильтр пространственных частот и описать свойства этого фильтра либо двумерной аппаратной функцией, либо частотно-контрастной характеристикой. Заметим, что по точно известной аппаратной функции и выходному изображению имеется возможность при отсутствии шума восстановить входное изображение. Наличие шума приводит к тому, что задача восстановления исходного сигнала становится некорректной [1].

Следует обратить внимание еще на одно обстоятельство. Даже в отсутствие шума (в его обычном понимании) характерным для оптических изображений является то, что в силу случайности светового поля всегда присутствует «шум», обусловленный квантовым характером излучения.

При анализе свойств оптических изображений существенную роль играет понятие контраста как меры различимости двух участков изображения. В классическом рассмотрении контраст не случаен, а его изменения целиком определяются свойствами передающей системы как пространственного фильтра. Ниже анализируются характеристики контраста для идеальной передающей системы с учетом статистики фотоотсчетов, формирующих изображение.

Характеристики контраста при отсутствии шума. Рассмотрим два участка изображения, на которые за фиксированное время падает n_1 и n_2 фотоотсчетов, причем n_1 и n_2 случайны. Ограничимся рассмотрением пуассоновских распределений n_1 и n_2, так как любое другое распределение фотоотсчетов с тем же средним приводит к большим ошибкам в определении контраста*, т. е.

$$P(n_1) = \frac{\lambda^{n_1}}{n_1!}\exp(-\lambda);\; P(n_2) = \frac{\mu^{n_2}}{n_2!}\exp(-\mu), \qquad (1)$$

где λ, μ — интенсивности соответствующих независимых потоков.

* Среди всех распределений фотоотсчетов с одинаковым средним простое пуассоновское имеет наименьшую дисперсию [2].

Назовем контрастом величину

$$K = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{2}$$

и попытаемся выяснить условия, в которых нельзя пренебречь ее флюктуациями (пороговые изображения). Для этого определим два первых момента контраста: математическое ожидание и дисперсию. Пусть $n_1 + n_2 = n = \text{const}$. При этом вероятность зарегистрировать на первом участке n_1 отсчетов

$$P(n_1/n) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{n_1} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{n - n_1} \binom{n}{n_1}, \tag{3}$$

т. е. n_1 в этом случае имеет биномиальное распределение, и математическое ожидание m-го начального момента контраста (значение его $K = \frac{2n_1 - n}{n}$) определяется соотношением

$$\overline{\left(\frac{2n_1 - n}{n}\right)^m} = \sum_{n_1 = 0}^{n} \left(\frac{2n_1 - n}{n}\right)^m P(n_1/n).$$

Отсюда

$$\overline{\left(\frac{2n_1 - n}{n}\right)} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}; \quad \overline{\left(\frac{2n_1 - n}{n}\right)^2} = \frac{4\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2 n} + \left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}\right)^2. \tag{4}$$

Если теперь учесть, что $P(n_1 + n_2 = n) = \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} \exp(-(\lambda + \mu))$, то, усредняя (4) по n, получим выражения для математического ожидания, среднего квадрата и дисперсии контраста *:

$$\overline{K} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}(1 - \exp(-(\lambda + \mu)));$$

$$\overline{K}^2 = \left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}\right)^2 (1 - \exp(-(\lambda + \mu))) + \frac{4\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n n!} \exp(-(\lambda + \mu));$$

$$D = \left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}\right)^2 (1 - \exp(-(\lambda + \mu))) \exp(-(\lambda + \mu)) + \frac{4\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n n!} \exp(-(\lambda + \mu)). \tag{5}$$

При не слишком малых $\lambda + \mu$ математическое ожидание контраста имеет вид

$$\overline{K} \cong \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}, \tag{6}$$

а дисперсия

$$D \cong \frac{4\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2 (\lambda + \mu - 1)} = \frac{1 - (\overline{K})^2}{\lambda + \mu - 1}.$$

Из приведенных соотношений видно, что флюктуационная ошибка возрастает при уменьшении интенсивности суммарного потока частиц, фор-

* Если $n_1 = n_2 = 0$, то $K = 0$, и поэтому суммирование по n при усреднении (4) должно производиться от $n = 1$.

мирующих изображение. Приближение пассивного фильтра действительно, когда $(\overline{K})^2 \gg D$ или

$$\lambda+\mu \gg \frac{1}{(\overline{K})^2}. \qquad (7)$$

Контраст при ослаблении интенсивностей потоков и наличии шума. Равномерное ослабление потоков с коэффициентом $\alpha<1$ эквивалентно уменьшению интенсивности потоков до $\alpha\lambda$ и $\alpha\mu$. В этом случае точные значения $\overline{K_0}$ и D_0 определяются из (5) при замене $\lambda\to\alpha\lambda$, $\mu\to\alpha\mu$. Если $\alpha(\lambda+\mu)$ достаточно велико, то $\overline{K_0}=K$, а дисперсия контраста возрастает:

$$D_0 = \frac{1-(\overline{K})^2}{\alpha(\lambda+\mu)-1}.$$

При очень большом ослаблении, помимо увеличения дисперсии, происходит снижение среднего контраста, обусловленное влиянием экспоненты в выражении для $\overline{K}$ из (5). Ослабление потоков может быть связано с постановкой равномерного фильтра, с уменьшением размера участков, на которых регистрируются фотоотсчеты, а также со снижением времени экспонирования.

Пусть на каждый из участков попадают отсчеты шума с интенсивностью $\varkappa$ и пуассоновским распределением. В этом случае точные выражения для $\overline{K}_ш$ и $D_ш$ определяются подстановкой в (5) вместо λ и μ величин $\lambda+\varkappa$ и $\mu+\varkappa$ соответственно. Приближенные выражения для $\overline{K}_ш$ и $D_ш$ имеют вид:

$$\overline{K}_ш = \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu+2\varkappa};\quad D_ш = \frac{1-(\overline{K}_ш)^2}{\lambda+\mu+2\varkappa-1}. \qquad (8)$$

Таким образом, добавление шума снижает дисперсию контраста, так как $\lambda+\mu+2\varkappa>\lambda+\mu$. Однако при этом появляется систематическая ошибка $\Delta K=\overline{K}-\overline{K}_ш = K\,2\varkappa/(\lambda+\mu+2\varkappa)$. Отметим, что, хотя дисперсия уменьшается, средний квадрат ошибки при наличии шума превышает дисперсию контраста при отсутствии шума, т. е. $D_ш+(\Delta K)^2 > D$.

Изменяющиеся интенсивности. Если изображение изменяется во времени, т. е. $N(x,y,t)=\overline{N}f(x,y,t)$, где $\overline{N}$ — среднее суммарное число фотоотсчетов, а $\int\limits_{x,y,t} f(x,y,t)\,dxdydt=1$, то интенсивности λ, μ на непересекающихся участках площадью $\Delta x\Delta y$ за время Δt равны:

$$\lambda = \overline{N}\int\limits_{-0,5\Delta t}^{0,5\Delta t} d\tau \int\limits_{-0,5\Delta x}^{0,5\Delta x} d\xi \int\limits_{-0,5\Delta y}^{0,5\Delta y} d\eta\, f(x_1+\xi;\ y_1+\eta;\ t_1+\tau);$$

$$\mu = \overline{N}\int\limits_{-0,5\Delta t}^{0,5\Delta t} d\tau \int\limits_{-0,5\Delta x}^{0,5\Delta x} d\xi \int\limits_{-0,5\Delta y}^{0,5\Delta y} d\eta\, f(x_2+\xi;\ y_2+\eta;\ t_2+\tau). \qquad (9)$$

Для одноканального регистратора Δx, Δy — размеры изображения (фотокатода) и

$$\lambda = \overline{N}\int\limits_{-0,5\Delta t}^{0,5\Delta t} \varphi(t_1+\tau)\,d\tau;\quad \mu = \overline{N}\int\limits_{-0,5\Delta t}^{0,5\Delta t} \varphi(t_2+\tau)\,d\tau, \qquad (10)$$

где $\varphi(t)$ — интеграл от $f(x,y,t)$ по размеру изображения.

Средний квадрат ошибки в передаче истинного контраста $K_{вх} = \dfrac{\varphi(t_1)-\varphi(t_2)}{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}$ равен $\overline{\varepsilon^2} = (K_{вх}-\overline{K})^2 + D$, где $\overline{K}$ и D

определяются из (5), а λ и μ — из (10). При $\Delta t=0$ не регистрируется ни одного отсчета и $\overline{K}=D=0$, а $\overline{\varepsilon^2}=K_{вх}^2$. Если $T\to\infty$, то очевидно, что $\overline{K}$, $D\to 0$ и снова $\overline{\varepsilon^2}=K_{вх}^2$. Отсюда следует, что существует оптимальная величина $(\Delta t)_0$, при которой $\overline{\varepsilon^2}$ имеет минимальное значение. Аналогичные утверждения справедливы и для «объема» $\Delta V_0=(\Delta x\Delta y\Delta t)_0$.

В заключение рассмотрим два численных примера. Сначала запишем выражение для относительной среднеквадратичной ошибки, когда $\lambda+\mu\gg 1$, $(\overline{K})^2\ll 1$:

$$\delta=\frac{\sqrt{D}}{\overline{K}}=\frac{1}{\overline{K}\sqrt{\lambda+\mu}}. \tag{11}$$

Число фотоотсчетов, необходимое для регистрации контраста $\overline{K}=0{,}1$ с относительной ошибкой $\delta=0{,}1$, составляет $\lambda+\mu=10^4$. Соответствующая плотность фототока равна $j=\frac{10^4 e}{\Delta t S}$, где e — заряд электрона; Δt — временной интервал; S — площадь, с которой снимается фототок. Для электронно-оптического регистратора в хронографическом режиме S — площадь входной щели. Если требуется разрешить $\Delta t=10^{-12}$ с, а $S=10^{-2}$ см^2, то необходимо иметь $j\geqslant 0{,}16$ А/см^2.

Второй пример. Пусть регистрируется тест-объект, представляющий собой штриховую миру с переменной пространственной частотой $\nu=\frac{1}{\Delta x}$, а высота штрихов $\Delta y=H$ для всех ν одинакова. Время регистрации $\Delta t=1$ с. В этом случае $\lambda=\varepsilon_ф H\nu^{-1}N_1$; $\mu=\varepsilon_ф H\nu^{-1}N_2$, где N_1 и N_2 (1/см$^2\cdot$с) — средняя плотность фотонов на светлом и темном штрихах; $\varepsilon_ф$ — квантовая эффективность фотокатода; $N=\frac{N_1+N_2}{2}$ соответствует средней освещенности изображения миры на фотокатоде. Очевидно, что $\lambda+\mu=2H\nu^{-1}\varepsilon_ф N=(\overline{K}\delta)^2$.

Назовем разрешаемой частотой ту, для которой $\delta=1$:

$$\nu_р^*=2(\overline{K})^2NH\varepsilon_ф.$$

Для обеспечения разрешения больше заданного при фиксированных $\overline{K}$, H, Δt необходимо обеспечить соответствующее значение N. Если $\Delta t=1$ с, $H=0{,}1$ см, $\overline{K}=0{,}5$, то для $\nu_р^*=100$ мм$^{-1}$ необходимо иметь $4\cdot10^4$ фотоэлектронов/см$^2\cdot$с, что при квантовой чувствительности фотокатода 0,1 соответствует освещенности $\Phi\sim10^{-5}$ лк. Если $\Phi\sim10^{-6}$ лк, то в рассмотренном примере $\nu_р^*=10$ мм$^{-1}$.

Авторы признательны З. А. Лившицу и Ю. Е. Нестерихину за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3.
2. Дж. Клаудер и Э. Сударшан. Основы квантовой оптики. М., «Мир», 1970.

Поступила в редакцию 2 февраля 1971 г.