АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1971

УДК 681.142.621

Ю. Д. ДОЛИНСКИЙ
(Ленинград)

АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКОГО РЕЖИМА РАБОТЫ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С МАЛЫМИ ВНУТРЕННИМИ ПОМЕХАМИ

Погрешность аналого-цифрового преобразователя, порожденная его внутренними помехами (ВП), исследована в работах ряда авторов, например в [1—5]. Эффективным средством уменьшения этой погрешности является цифровое осреднение, но среднее арифметическое результатов преобразования (РП) в общем случае оказывается смещенной оценкой преобразуемого сигнала (ПС), т. е. осреднение само вносит определенную погрешность [4—8]. В литературе описаны способы исключения этой погрешности, но они достаточно сложны [6, 7] и иногда увеличивают дисперсию РП [7].

Если область нечувствительности (ОН), образованная ВП, расположена симметрично относительно эталона, а ПС распределен равномерно в пределах шага квантования, то существует отличная от нуля вероятность неправильных РП [9]. Вследствие этого характеристики преобразователя ухудшаются: математическое ожидание РП отличается от правильного РП, математическое ожидание абсолютной погрешности преобразования не равно нулю и т. д. Но поскольку некоторые параметры ВП можно изменять сравнительно простыми способами (например, для изменения математического ожидания ВП достаточно подать соответствующее смещение на один из входов компаратора), то этим можно воспользоваться для улучшения характеристик преобразователя.

В настоящей статье исследуется поведение основных характеристик преобразователя: математического ожидания и дисперсии РП и абсолютной погрешности преобразования при изменении тех же параметров ВП для произвольного в пределах шага квантования закона распределения ПС. Основное внимание уделяется поискам таких значений этих параметров, при которых указанные характеристики преобразователя оптимальны, а последующее цифровое осреднение выполняется без дополнительной погрешности.

При анализе используется идеализированная модель безынерционного преобразователя, на входе которого действует сумма ПС и выраженных в масштабе этого сигнала ВП, причем эти слагаемые считаются аналогично [1] случайными величинами. ВП предполагаются малыми; под этим понимается, что ширина ОН не превосходит шага квантования. Для определенности полагается, что построение сетки эталонов производится методом их возрастания.

Рассмотрим сравнение ПС x с эталоном x_i (индекс внизу указывает порядковый номер эталона). Аналогично [9] предположим, что $x \in \left(x_k - \frac{q}{2},\ x_k + \frac{q}{2}\right]$, т. е.

$$\int\limits_{x_k - \frac{q}{2}}^{x_k + \frac{q}{2}} p(x)\,dx = 1, \tag{1}$$

где $p(x)$ — плотность распределения ПС; q — шаг квантования. Далее будем считать, что $p(x)$ непрерывна в интервале $\left(x_k - \frac{q}{2},\ x_k + \frac{q}{2}\right)$. ОН при сравнении x с эталоном x_i образует промежуток $(x_i - \delta_1,\ x_i + \delta_2]$ шириной Δ. Эта область характерна тем, что внутри и только внутри нее значения функции распределения ВП отличны от 0 и 1. Положение ОН относительно эталона x_i удобно характеризовать величиной математического ожидания ВП m_F, а положение последнего внутри ОН определяется расстояниями до краев этой области

$$\delta_1' = \delta_1 + m_F,\ \delta_2' = \delta_2 - m_F, \tag{2}$$

которые назовем соответственно нижним и верхним порогами чувствительности преобразователя.

Интегрируя по частям выражение для математического ожидания ВП [10], легко показать, что $\delta_2' = \int\limits_{x_i - \delta_1}^{x_i + \delta_2} F_i(x - x_i)\,dx$, где $F_i(x)$ — функция распределения ВП, соответствующая сравнению с эталоном x_i ($F_i(x)$ полагается непрерывной).

Если $(x_i - \delta_1,\ x_i + \delta_2] \cap \left(x_k - \frac{q}{2},\ x_k + \frac{q}{2}\right] = \Lambda$, где Λ — пустое множество, то вследствие (1) компаратор дает вполне определенный ответ о сравнительной величине ПС и эталона. Поэтому интерес для исследования представляет только случай $(x_i - \delta_1,\ x_i + \delta_2] \cap \left(x_k - \frac{q}{2},\ x_k + \frac{q}{2}\right] \neq \Lambda$. В зависимости от взаимного расположения промежутков $(x_i - \delta_1,\ x_i + \delta_2]$ и $\left(x_k - \frac{q}{2},\ x_k + \frac{q}{2}\right]$ могут быть два варианта, которые необходимо исследовать отдельно.

1. Вся ОН расположена в промежутке $\left(x_k - \frac{q}{2},\ x_k + \frac{q}{2}\right]$, т. е. $(x_i - \delta_1,\ x_i + \delta_2] \subset \left(x_k - \frac{q}{2},\ x_k + \frac{q}{2}\right]$. Это означает

$$(k - i)\,q - \frac{q}{2} + \delta_1' \leqslant m_F \leqslant (k - i)\,q + \frac{q}{2} - \delta_2'. \tag{3}$$

Воспользовавшись способом, изложенным в [9], легко показать, что возможны два РП: x_i и x_{i+1}; вероятности их соответственно равны:

$$p_i = \int\limits_{x_k - \frac{q}{2}}^{x_i + \delta_2} p(x)\,dx - \int\limits_{x_i - \delta_1}^{x_i + \delta_2} p(x)\,F_i(x - x_i)\,dx;$$

$$p_{i+1} = \int\limits_{x_i+\delta_2}^{x_k+\frac{q}{2}} p(x)\,dx + \int\limits_{x_i-\delta_1}^{x_i+\delta_2} p(x)\,F_i(x-x_i)\,dx. \tag{4}$$

Складывая эти равенства, с учетом (1) получаем

$$p_i + p_{i+1} = 1. \tag{5}$$

Согласно (4), для выполнения равенства $p_i = 1$ или $p_{i+1} = 1$ необходимо соответственно:

$$p(x) = 0 \text{ при } x \in \left(x_i - \delta_1,\ x_k + \frac{q}{2}\right]; \tag{6}$$

$$p(x) = 0 \text{ при } x \in \left(x_k - \frac{q}{2},\ x_i + \delta_2\right]. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение функцию распределения F_{01}, соответствующую $m_{F0} = 0$ и $\Delta_0 = 1$. Ввиду малости ВП и вследствие (3) диапазоны изменения Δ и m_F весьма малы, и можно считать, что вид функции распределения ВП сохраняется неизменным при изменении как Δ, так и m_F. Поэтому имеют место соотношения:

$$F_i(x) = F_{01}\left(\frac{x - m_F}{\delta}\right);\ \delta_j' = \delta\,\delta_{j0}'\ (j = 1, 2), \tag{8}$$

где $\delta = \frac{\Delta}{\Delta_0}$ — относительная ширина ОН; δ_{10}', δ_{20}' — пороги чувствительности преобразователя, функцией распределения ВП которого является F_{01}. Подстановка (2) и (8) в (4) дает:

$$\begin{aligned} p_i &= \int\limits_{x_k-\frac{q}{2}}^{x_i+m_F+\delta\delta_{20}'} p(x)\,dx + \int\limits_{x_i+m_F-\delta\delta_{10}'}^{x_i+m_F+\delta\delta_{20}'} p(x)\,F_{01}\left(\frac{x-x_i-m_F}{\delta}\right)dx; \\ p_{i+1} &= \int\limits_{x_i+m_F+\delta\delta_{20}'}^{x_k+\frac{q}{2}} p(x)\,dx + \int\limits_{x_i+m_F-\delta\delta_{10}'}^{x_i+m_F+\delta\delta_{20}'} p(x)\,F_{01}\left(\frac{x-x_i-m_F}{\delta}\right)dx. \end{aligned} \tag{9}$$

Дифференцируя (9) по m_F и производя замену переменных по формуле $\frac{1}{\delta}(x - x_i - m_F) = z$, получаем

$$\frac{\partial p_i}{\partial m_F} = -\frac{\partial p_{i+1}}{\partial m_F} = \int\limits_{-\delta_{10}'}^{\delta_{20}'} p(\delta z + x_i + m_F)\quad F_{01}'(z)\,dz \geqslant 0.$$

Этот результат хорошо согласуется с физическими представлениями. Действительно, увеличение m_F сдвигает ОН вдоль оси ПС вправо, расширяя область значений ПС, при сравнении которых с эталоном x_i компаратор дает ответ о превосходстве эталона над ПС. Вероятность такого ответа возрастает, а этот последний, как показано в [9], эквивалентен РП x_i. Поэтому вероятность p_i достигает своего наибольшего значения на правом конце рассматриваемого диапазона изменения m_F, а p_{i+1} — на левом. Подставляя (3) в (9), с учетом (1) получаем:

$$p_{i\text{н}} = 1 - \int\limits_{x_k + \frac{q}{2} - \Delta}^{x_k + \frac{q}{2}} p(x)\, F_{01}\left(\frac{1}{\delta}\left(x - x_k - \frac{q}{2}\right) + \delta'_{20}\right) dx;$$

$$p_{i+1\text{н}} = \int\limits_{x_k - \frac{q}{2} + \Delta}^{x_k + \frac{q}{2}} p(x)\, dx + \int\limits_{x_k - \frac{q}{2}}^{x_k - \frac{q}{2} + \Delta} p(x)\, F_{01} \times \tag{10}$$

$$\times \left(\frac{1}{\delta}\left(x - x_k + \frac{q}{2}\right) - \delta'_{10}\right) dx.$$

С помощью (5) легко показать, что

$$\max\,(p_{i\text{н}},\ p_{i+1\text{н}}) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Правильным РП в условиях (1) является x_k [11], поэтому для получения наибольшей вероятности именно этого результата следует положить (выбрав соответствующее значение m_F)

$$i = \begin{cases} k & \text{при } p_{i\text{н}} > p_{i+1\text{н}}; \\ k-1 & \text{при } p_{i\text{н}} < p_{i+1\text{н}}. \end{cases}$$

Поведение вероятностей (9) при изменении ширины ОН (и пропорциональной ее квадрату дисперсии ВП) может быть различным при разных $p(x)$.

С помощью (9) можно получить выражения для остальных параметров РП, в том числе

$$m_i = x_i + q\, p_{i+1};\ D_i = q^2 p_i\, p_{i+1}, \tag{12}$$

где m_i и D_i — математическое ожидание и дисперсия РП. Из (12) следует, что равенства $m_i = x_i$ или $m_i = x_{i+1}$ и $D_i = 0$ возможны только при выполнении (6) или (7). В противном случае $x_i < m_i < x_{i+1}$ и дисперсия D_i отлична от 0. Максимальное значение D_i, равное $\frac{q^2}{4}$, достигается при $p_i = p_{i+1} = \frac{1}{2}$.

Используя рассуждения, изложенные в [9], плотность распределения абсолютной погрешности преобразования Δx можно записать в виде

$$p(\Delta x) = \begin{cases} 0; & \Delta x < -\delta_2; \\ p(x_i - \Delta x)\,[1 - F_i(-\Delta x)]; & -\delta_2 \leqslant \Delta x < \delta_1; \\ p(x_i - \Delta x); & \delta_1 \leqslant \Delta x < (i-k)\,q + \frac{q}{2}; \\ p(x_{i+1} - \Delta x); & (i-k)\,q + \frac{q}{2} \leqslant \Delta x < -\delta_2 + q; \\ p(x_{i+1} - \Delta x)\, F_i(q - \Delta x); & -\delta_2 + q \leqslant \Delta x < \delta_1 + q; \\ 0; & \Delta x \geqslant \delta_1 + q. \end{cases} \tag{13}$$

Теперь можно получить все параметры абсолютной погрешности и среди них

$$m_\Delta = m_i - m; \; D_\Delta = D + D_i +$$

$$+ 2q \left[m p_{i+1} - \int_{x_i+\delta_2}^{x_k+\frac{q}{2}} x p(x)\, dx - \int_{x_i-\delta_1}^{x_i+\delta_2} x p(x) F_i(x - x_i)\, dx \right], \quad (14)$$

где m_Δ и D_Δ — математическое ожидание и дисперсия абсолютной погрешности преобразования; m и D — математическое ожидание и дисперсия ПС.

Поведение математических ожиданий m_i и m_Δ при изменении параметров ВП вследствие (12) и (14) совпадает с поведением вероятности p_{i+1}, а поведение дисперсий D_i и D_Δ зависит от вида плотности распределения ПС $p(x)$.

2. В промежуток $\left(x_k - \frac{q}{2},\, x_k + \frac{q}{2}\right]$ попадает часть ОН. Для определенности рассмотрим случай $(x_i - \delta_1,\, x_i + \delta_2] \cap \left(x_k - \frac{q}{2},\, x_k + \frac{q}{2}\right] = \left(x_i - \delta_1,\, x_k + \frac{q}{2}\right] \neq \Lambda$. Отсюда следует $(x_{i-1} - \delta_1,\, x_{i-1} + \delta_2] \cap \left(x_k - \frac{q}{2},\, x_k + \frac{q}{2}\right] = \left(x_k - \frac{q}{2},\, x_{i-1} + \delta_2\right] \neq \Lambda$, т. е. разные участки ОН попадают в интервал $\left(x_k - \frac{q}{2},\, x_k + \frac{q}{2}\right]$ дважды: при сравнении с x_i и x_{i-1}. Но поскольку $\Delta \leqslant q$, то $x_{i-1} + \delta_2 \leqslant x_i - \delta_1$; $(x_{i-1} - \delta_1$ $x_{i-1} + \delta_2] \cap (x_i - \delta_1,\, x_i + \delta_2] = \Lambda$. В рассматриваемом варианте $(k - i)\, q + \frac{q}{2} - \delta_2' \leqslant m_F \leqslant (k - i)\, q + \frac{q}{2} + \delta_1'$.

Аналогично предыдущему легко показать, что возможны три РП: x_{i-1}, x_i и x_{i+1}, вероятности которых соответственно равны:

$$p_{i-1} = \int_{x_k-\frac{q}{2}}^{x_{i-1}+\delta_2} p(x)\, dx - \int_{x_k-\frac{q}{2}}^{x_{i-1}+\delta_2} p(x)\, F_{i-1}(x - x_{i-1})\, dx;$$

$$p_i = \int_{x_k-\frac{q}{2}}^{x_{i-1}+\delta_2} p(x) F_{i-1}(x - x_{i-1}) dx + \int_{x_{i-1}+\delta_2}^{x_k+\frac{q}{2}} p(x)\, dx -$$

$$- \int_{x_i-\delta_1}^{x_k+\frac{q}{2}} p(x)\, F_i(x - x_i)\, dx; \quad (15)$$

$$p_{i+1} = \int_{x_i-\delta_1}^{x_k+\frac{q}{2}} p(x)\, F_i(x - x_i)\, dx.$$

Складывая равенства (15) и учитывая (1), получаем $p_{i-1} + p_i + p_{i+1} = 1$. Согласно (15), $p_i = 1$ и, следовательно, $p_{i-1} = p_{i+1} = 0$ при условии

$$p(x) = 0, \text{ если } x \in (x_{i-1} + \delta_2,\, x_i - \delta_1]. \quad (16)$$

Смысл выражений (6), (7) и (16) одинаков: РП может быть единственным, если только диапазоны изменения ПС и ОН не пересекаются. Из (15) имеем

$$p_{i-1}\Big|_{m_F=(k-i)q+\frac{q}{2}-\delta_2'} = p_{i+1}\Big|_{m_F=(k-i)q+\frac{q}{2}+\delta_1'} = 0. \qquad (17)$$

Выражения (4), (15) и (17) показывают, что вероятности РП являются непрерывными функциями математического ожидания m_F. Подставляя (2) и (8) в (15), приведем последние к виду

$$p_{i-1} = \int\limits_{x_k-\frac{q}{2}}^{x_{i-1}+m_F+\delta\delta_{20}'} p(x)\,dx - \int\limits_{x_k-\frac{q}{2}}^{x_{i-1}+m_F+\delta\delta_{20}'} p(x)\,F_{01}\left(\frac{x-x_{i-1}-m_F}{\delta}\right)dx;$$

$$p_i = \int\limits_{x_k-\frac{q}{2}}^{x_{i-1}+m_F+\delta\delta_{20}'} p(x)\,F_{01}\left(\frac{x-x_{i-1}-m_F}{\delta}\right)dx + \int\limits_{x_{i-1}+m_F+\delta\delta_{20}'}^{x_k+\frac{q}{2}} p(x)\,dx -$$

$$- \int\limits_{x_i+m_F-\delta\delta_{10}'}^{x_k+\frac{q}{2}} p(x)\,F_{01}\left(\frac{x-x_i-m_F}{\delta}\right)dx; \qquad (18)$$

$$p_{i+1} = \int\limits_{x_i+m_F-\delta\delta_{10}'}^{x_k+\frac{q}{2}} p(x)\,F_{01}\left(\frac{x-x_i-m_F}{\delta}\right)dx.$$

Дифференцируя (18) по m_F, производя указанную выше замену переменных и обозначая $\frac{1}{\delta}\left(x_k-\frac{q}{2}-x_{i-1}-m_F\right)=\frac{1}{\delta}\left(x_k+\frac{q}{2}-\right.$ $\left.-x_i-m_F\right)=x^*$, получаем:

$$\frac{\partial p_{i-1}}{\partial m_F} = \int\limits_{x^*}^{\delta_{20}'} p(\delta z + x_{i-1} + m_F)\,F_{01}'(z)\,dz \geqslant 0;$$

$$\frac{\partial p_{i+1}}{\partial m_F} = -\int\limits_{-\delta_{10}'}^{x^*} p(\delta z + x_i + m_F)\,F_{01}'(z)\,dz \leqslant 0;$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial m_F} = -\left(\frac{\partial p_{i-1}}{\partial m_F} + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial m_F}\right).$$

На левом краю рассматриваемого диапазона изменения m_F производная $\frac{\partial p_i}{\partial m_F}$ не отрицательна, а на правом — не положительна, поэтому своей максимальной величины вероятность p_i достигает именно внутри рассматриваемого диапазона изменения m_F, причем $p_i = p_{i\max}$ при условии

$$\int_{x^*}^{\delta'_{20}} p(\delta z + x_{i-1} + m_F) F'_{01}(z)\,dz = \int_{-\delta'_{10}}^{x^*} p(\delta z + x_i + m_F) F'_{01}(z)\,dz. \quad (19)$$

Согласно (11), $p_{i\max} \geqslant \frac{1}{2}$, и для получения наибольшей вероятности правильного РП следует положить $i=k$.

Как и в предыдущем варианте, сделать какой-либо определенный вывод о поведении вероятностей (18) при изменении ширины ОН в общем случае нельзя. В данном варианте имеем

$$m_i = x_i + q(p_{i+1} - p_{i-1});\quad D_i = q^2[1 - p_i - (p_{i+1} - p_{i-1})^2]. \quad (20)$$

Из (20) и (17) ввиду непрерывности вероятностей p_{i-1} и p_{i+1} следует, что внутри рассматриваемого диапазона изменения m_F выполняется равенство $m_i = x_i$. Для этого достаточно (и необходимо)

$$p_{i-1} = p_{i+1}. \quad (21)$$

$D_i = 0$ имеет место только при выполнении (16). Из (20) получаем

$$\frac{\partial D_i}{\partial m_F} = -q^2\left[\frac{\partial p_i}{\partial m_F} + 2(p_{i+1} - p_{i-1})\left(\frac{\partial p_{i+1}}{\partial m_F} - \frac{\partial p_{i-1}}{\partial m_F}\right)\right].$$

Каждое слагаемое в квадратных скобках внутри рассматриваемого диапазона изменения m_F меняет знак, и, следовательно, дисперсия D_i внутри этого диапазона может иметь экстремум, если при некотором значении m_F справедливо равенство

$$\frac{\partial p_i}{\partial m_F} + 2(p_{i+1} - p_{i-1})\left(\frac{\partial p_{i+1}}{\partial m_F} - \frac{\partial p_{i-1}}{\partial m_F}\right) = 0. \quad (22)$$

Этот экстремум является минимумом, если

$$\frac{\partial^2 D_i}{\partial m_F^2} > 0. \quad (23)$$

Если уравнения (19) и (21) имеют общий корень, то последний является и корнем (22). И наоборот, корень уравнений (21) и (22) удовлетворяет и (19). Если же (19), (21) и (22) несовместны, то может быть выполнено только одно из трех равенств: $p_i = p_{i\max}$, $m_i = x_i$ или $D_i = D_{i\min}$. Однако, пользуясь линейностью зависимости математического ожидания m_i от величины эталонов, даже в этих условиях можно выполнить как равенство $m_i = x_i$, так и любое из оставшихся. Действительно, пусть $\overset{*}{m_F}$ — корень уравнения (19) или (22). Выберем эту величину в качестве рабочей, удовлетворив тем выбранное уравнение. Тогда $m_i = m_i^*$. Из каждого РП будем вычитать разность $m_i^* - x_i$. Математическое ожидание РП при этом окажется равным

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} [x_j - (m_i^* - x_i)]\,p_j = x_i.$$

Произведенная операция эквивалентна изменению начала отсчета эталонов и, очевидно, не изменяет вероятностей РП. Поэтому центральные моменты сохраняются неизменными, а начальные — изменяют свою величину.

В рассматриваемом варианте

$$p(\Delta x)=\begin{cases} 0; & \Delta x < -\delta_2; \\ p(x_{i-1}-\Delta x)[1-F_{i-1}(-\Delta x)]; & -\delta_2 \leqslant \Delta x < (i-k)q-\frac{q}{2}; \\ p(x_i-\Delta x)[1-F_i(-\Delta x)]; & (i-k)q-\frac{q}{2} \leqslant \Delta x < \delta_1; \\ p(x_i-\Delta x); & \delta_1 \leqslant \Delta x < -\delta_2+q; \\ p(x_i-\Delta x)F_{i-1}(q-\Delta x); & -\delta_2+q \leqslant \Delta x < (i-k)q+\frac{q}{2}; \\ p(x_{i+1}-\Delta x)F_i(q-\Delta x); & (i-k)q+\frac{q}{2} \leqslant \Delta x < \delta_1+q; \\ 0; & \Delta x \geqslant \delta_1+q. \end{cases} \tag{24}$$

Отсюда

$$m_\Delta = m_i - m; \quad D_\Delta = D + D_i + 2q\Big[m(p_{i+1}-p_{i-1}) + \int\limits_{x_k-\frac{q}{2}}^{x_{i-1}+\delta_2} xp(x)\,dx - \int\limits_{x_k-\frac{q}{2}}^{x_{i-1}+\delta_2} xp(x)F_{i-1}(x-x_{i-1})\,dx - \int\limits_{x_i-\delta_1}^{x_k+\frac{q}{2}} xp(x)F_i(x-x_i)\,dx\Big]. \tag{25}$$

Соответствующим выбором начала отсчета эталонов можно получить $x_i = m$. Если при этом выполняется (21), то цифровое осреднение не дает дополнительной погрешности [5]. Такой способ исключения погрешности цифрового осреднения аппаратурно проще, чем предлагаемые в [6, 7], и не увеличивает дисперсию РП, как в [7]. Теперь рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть

$$p(x) = 0 \text{ при } x \in (x', x''] \subset \left(x_k - \frac{q}{2},\ x_k + \frac{q}{2}\right]. \tag{26}$$

Это может иметь место, например, когда ПС поступает на вход аналого-цифрового преобразователя после цифро-аналогового преобразования. Конкретным примером такой аппаратуры могут служить стенды для испытания цифро-аналоговых преобразователей. Если $\Delta + (x'' - x') \leqslant q$, то, выбирая

$$m_F \in [x'' - x_i + \delta_1',\ x' - x_i - \delta_2'], \tag{27}$$

получаем $p_i = 1$, что легко проверить непосредственной подстановкой (26) и (27) в (9) или (18). Поскольку (26) и (27) в совокупности эквивалентны (6) или (16), то эти последние являются не только необходимыми, но и достаточными условиями $p_i = 1$. При выполнении (26) и (27) $m_i = x_i$, $D_i = 0$, $m_\Delta = x_i - m$, $D_\Delta = D$.

Как указано выше, нетрудно получить $x_i = m$ и соответственно $m_\Delta = 0$. Следовательно, методическая составляющая математического ожидания абсолютной погрешности отсутствует. Дисперсия D_Δ минимальна и является методической. Все остальные слагаемые в формулах (14) и (25) порождаются инструментальной составляющей.

Покажем, что поведение вероятностей РП при изменении ширины ОН может быть различным. Рассмотрим вариант 1. Пусть сначала $x'' = x_i - \delta_1$. Тогда $p_i = 1$, $p_{i+1} = 0$. Зафиксируем m_F и увеличим Δ. При этом оказывается $x'' > x_i - \delta_1$ и $p_i < 1$, $p_{i+1} > 0$, т. е. вероятность p_i уменьшилась, а p_{i+1} — увеличилась. Затем реализуем $x' = x_i + \delta_2$, что дает $p_i = 0, p_{i+1} = 1$. Увеличение Δ приводит к $p_i > 0$, $p_{i+1} < 1$, т. е. увеличивается вероятность p_i и уменьшается p_{i+1}.

2. Пусть

$$p(x) = \frac{1}{q}. \tag{28}$$

Это, по-видимому, самый распространенный и поэтому наиболее важный случай. Вероятности (4) после подстановки (28) принимают вид

$$p_i = (i-k) + \frac{1}{2} + \frac{m_F}{q}; \quad p_{i+1} = (k-i) + \frac{1}{2} - \frac{m_F}{q}.$$

Подставляя (28) в (10), получаем: $p_{i\text{н}} = 1 - \frac{\delta_2'}{q}$; $p_{i+1\text{н}} = 1 - \frac{\delta_1'}{q}$.
Поэтому возможна более точная, чем (11), оценка, а именно:

$$\max(p_{i\text{н}}, p_{i+1\text{н}}) \geqslant 1 - \frac{\Delta}{2q}. \tag{29}$$

Подстановка (28) в (15) дает:

$$p_{i-1} = \left[(i-k) - \frac{1}{2} + \frac{\delta_2}{q}\right] - \frac{1}{q} \int\limits_{x_k - \frac{q}{2}}^{x_{i-1}+\delta_2} F_{i-1}(x - x_{i-1})\, dx;$$

$$p_i = \left[(k-i) + \frac{3}{2} - \frac{\delta_2}{q}\right] + \frac{1}{q} \int\limits_{x_k - \frac{q}{2}}^{x_{i-1}+\delta_2} F_{i-1}(x - x_{i-1})\, dx -$$

$$- \frac{1}{q} \int\limits_{x_i - \delta_1}^{x_k + \frac{q}{2}} F_i(x - x_i)\, dx;$$

$$p_{i+1} = \frac{1}{q} \int\limits_{x_i - \delta_1}^{x_k + \frac{q}{2}} F_i(x - x_i)\, dx.$$

Отсюда вследствие $m_{F0} = 0$ имеем:

$$\frac{\partial p_{i-1}}{\partial \delta} = \frac{1}{q} \int\limits_{x^*}^{\delta_{20}'} z F_{01}'(z)\, dz > 0; \quad \frac{\partial p_{i+1}}{\partial \delta} = -\frac{1}{q} \int\limits_{-\delta_{10}'}^{x^*} z F_{01}'(z)\, dz > 0;$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \delta} = -\left(\frac{\partial p_{i-1}}{\partial \delta} + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial \delta}\right) < 0.$$

Согласно (29), $p_{i\,\max} \geqslant 1 - \frac{\Delta}{2q}$. После подстановки (28) в (12) и (20) оба выражения для математического ожидания РП оказываются одинаковыми: $m_i = x_k + \frac{q}{2} - m_F$. При этом уравнения (19), (21) и (22), а также условие (23) значительно упрощаются и принимают вид

$$F_{01}(x^*) = \frac{1}{2};\quad \frac{m_F}{q} = \frac{1}{2} + (k - i);\quad F_{01}(x^*) + \frac{m_F}{q} = 1 + (k - i);$$

$$F'_{01}(x^*) > \frac{\delta}{q}. \qquad (30)$$

Легко показать, что при симметрично распределенных ВП уравнения (30) всегда совместны и их корень равен $m_F = \frac{q}{2} + (k - i)\,q$.

Выражения (13) и (24) в данном примере оказываются также одинаковыми:

$$p(\Delta x) = \begin{cases} 0; & \Delta x < -\delta_2; \\ \frac{1}{q}\,[1 - F_i(-\Delta x)]; & -\delta_2 \leqslant \Delta x < \delta_1; \\ \frac{1}{q}; & \delta_1 \leqslant \Delta x < -\delta_2 + q; \\ \frac{1}{q}\,F_i(q - \Delta x); & -\delta_2 + q \leqslant \Delta x < \delta_1 + q; \\ 0; & \Delta x \geqslant \delta_1 + q. \end{cases}$$

Все величины, характеризующие абсолютную погрешность, тоже одинаковы в обоих вариантах, в том числе и дисперсия $D_\Delta = D + D_F = \frac{q^2}{12} + D_F$, где D_F — дисперсия ВП. Такой же результат получен в [4].

В условии (28) всегда выполняется равенство $x_i = m$, поэтому для исключения погрешности цифрового осреднения достаточно удовлетворить второе из уравнений (30).

Из изложенного видно, что изменением математического ожидания ВП (например, подачей соответствующего смещения на один из входов компаратора) можно существенно менять характеристики преобразователя. При расположенной полностью в промежутке $\left(x_k - \frac{q}{2},\ x_k + \frac{q}{2}\right]$ ОН количество возможных РП в общем случае равно двум, и оптимальные значения основных характеристик преобразователя не достигаются. Если же в указанный промежуток попадает только часть ОН, то количество возможных РП увеличивается до трех, но можно получить оптимальные значения важнейших характеристик преобразователя (максимальную при данной ширине ОН вероятность правильного РП, равное правильному РП математическое ожидание РП, минимальную дисперсию РП, равное нулю математическое ожидание абсолютной погрешности преобразования) и исключить погрешность цифрового осреднения без увеличения дисперсии РП. Изменение указанных характеристик при изменении дисперсии ВП зависит от закона распределения ПС, а в случае равномерного распределения ПС увеличение дисперсии ВП приводит к уменьшению вероятности правильного РП и, таким образом, к увеличению дисперсии РП и абсолютной погрешности преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Земельман, А. П. Кнюпфер, В. А. Куликов. Определение статистических характеристик измеряемых величин при малых дисперсиях по выходным сигналам аналого-цифровых преобразователей.— Автометрия, 1966, № 2.
2. А. Н. Касперович, И. Я. Корчагин. О характеристиках погрешности квантования по уровню суммы постоянного сигнала и нормального шума с малой дисперсией.— Автометрия, 1966, № 6.
3. А. П. Кнюпфер. Статические погрешности аналого-цифровых преобразователей.— Измерительная техника, 1967, № 8.
4. В. М. Ефимов. Ошибки квантования по уровню при цифровых измерениях.— Автометрия, 1967, № 6.
5. С. М. Персин. Исследование некоторых методов повышения точности цифровых измерительных систем. Автореферат канд. дисс. Л., 1966.
6. С. М. Персин. Квантование по уровню при цифровых измерениях.— Автометрия, 1969, № 2.
7. М. Л. Езерский, А. М. Куперман. О выборе шага квантования по уровню и по времени при цифровом осреднении.— Автометрия, 1967, № 4.
8. В. М. Ефимов. Влияние квантования по уровню на результат статистической обработки измерений.— В сб. «Проблемы электрометрии». Новосибирск, «Наука», 1967.
9. Ю. Д. Долинский. Анализ статических погрешностей преобразователя напряжение — цифра.— ИВУЗ, Приборостроение, 1966, т. IX, № 4.
10. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1965.
11. А. А. Косякин. Учет эффекта квантования по уровню при статистическом анализе замкнутых цифровых автоматических систем.— Автоматика и телемеханика, 1966, т. XXVII, № 5.

Поступила в редакцию
26 января 1970 г.,
окончательный вариант —
7 сентября 1970 г.