АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 5 1971

УДК 621.317.519.25

И. В. МОДЯГИН, Г. Н. СОЛОПЧЕНКО
(Ленинград)

ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Настоящая статья имеет целью: 1) указать на объективные предпосылки в пользу нормирования погрешностей посредством интервальных характеристик; 2) предложить для нормирования такую интервальную характеристику, которая отражала бы случайный характер погрешностей; 3) показать, что оценка предлагаемой характеристики может быть осуществлена на основе хорошо разработанного аппарата параметрического и непараметрического оценивания.

Для иллюстрации некоторых положений в статье приведены графики, построенные либо по известным статистическим таблицам, либо на основании расчетов с помощью ЭВМ.

При постановке задачи интервального оценивания погрешностей измерения будем исходить из следующего.

1. Оценке и нормированию могут подлежать только характеристики, присущие всей генеральной совокупности. Назовем такие характеристики генеральными. Например, генеральными характеристиками погрешностей являются: математическое ожидание m, дисперсия σ^2, интервал $I_P = [a, b)$, такой, что $P\{\delta \in I_P\} = P$. Иногда интервал I_P неправильно называют доверительным.

2. Оценивание генеральных характеристик производится по выборке конечного объема, поэтому сами оценки можем назвать выборочными характеристиками. Выборочными характеристиками, например, являются: среднее арифметическое $\bar{\delta}$ и среднеквадратическое отклонение s.

3. Естественно, что вследствие случайности выборочных характеристик последние неточно оценивают генеральные характеристики. Поэтому будем говорить об уровне надежности оценивания — доверительной вероятности π. В расчетных примерах использованы величины $\pi=0{,}95$; 0,99 как наиболее употребительные.

4. Очевидно, интервалов, удовлетворяющих $P\{\delta \in I_P\} = P$, можно указать бесчисленное множество. С тем чтобы исключить такую неопределенность, в качестве генеральной интервальной характеристики погрешностей будем использовать интервал $\overset{0}{I}_P$, симметричный относительно математического ожидания. Такой интервал является единственным и полностью согласуется с предпосылками в пользу его использования (см. п. 1). В расчетных примерах использованы величины $P=0{,}95$; 0,99 как наиболее употребительные.

5. В качестве оценки (выборочной характеристики) для интервала I_P^0 естественно выбрать такой интервал J_P^0, который накрывал бы интервал I_P^0 с заданной вероятностью π. Такой интервал J_P^0 называется доверительным интервалом для I_P^0 с доверительной вероятностью π [1]. Кроме того, для оценивания интервала I_P^0 с успехом могут быть применены толерантные пределы $[a, b]$ [1], т. е. такие границы, о которых с вероятностью π можно утверждать, что внутри них содержится не менее P-й доли всей генеральной совокупности.

Ниже будут приведены известные методы параметрического и непараметрического оценивания интервала I_P^0.

Параметрическая оценка интервала I_P^0. в случае нормального распределения погрешностей. Весьма распространенными в технической литературе оценками границ интервала I_P^0 нормальной генеральной совокупности являются величины:

$$a = \bar{\delta} + ks;\ b = \bar{\delta} - ks, \tag{1}$$

где в качестве k обычно выбирают $\frac{1+P}{2} \cdot 100$-процентную квантиль нормального распределения (0,1). Так, например, выбирая $k=3$, иногда считают, что $P\{\bar{\delta} - 3s < \delta < \bar{\delta} + 3s\} = 0{,}997$, а если $k=1{,}96$, то $P\{\bar{\delta}-1{,}96s < \delta<\bar{\delta}+1{,}96s\} = 0{,}95$ и т. д. Однако эти соотношения были бы справедливыми, если бы вместо оценок $\bar{\delta}$ и s использовались генеральные характеристики m и σ. Но величины $\bar{\delta}$ и s являются случайными, и, как известно, их разброс увеличивается с уменьшением n. Поэтому для достижения заданной надежности оценивания интервала I_P^0 необходимо раздвинуть границы, что достигается увеличением множителя при s. Очевидно, что этот множитель должен зависеть от n, а также от вероятностей P и π. Обозначим этот множитель через $\varkappa(n, P, \pi)$. Тогда в качестве оценок границ интервала I_P^0 нормальной генеральной совокупности необходимо использовать пределы

$$a = \bar{\delta} - \varkappa(n, P, \pi)\, s,\ b = \bar{\delta} + \varkappa(n, P, \pi)\, s, \tag{2}$$

которые являются толерантными пределами уровня π, содержащими не менее P-й доли генеральной совокупности. Множитель $\varkappa(n, P, \pi)$ называется толерантным множителем и определяется из таблиц [2]. По таблицам [2] для $\pi=0{,}95$, $\pi=0{,}99$, $P=0{,}95$ и $P=0{,}99$ на рис. 1 построены графики зависимостей $\varkappa(n, P, \pi)=\varphi(n)$. Такие же графики приведены в [3, 4], где, например, для $P=0{,}95$ при малых объемах выборки значение $\varkappa$ существенно превышает значение $k=1{,}96$.

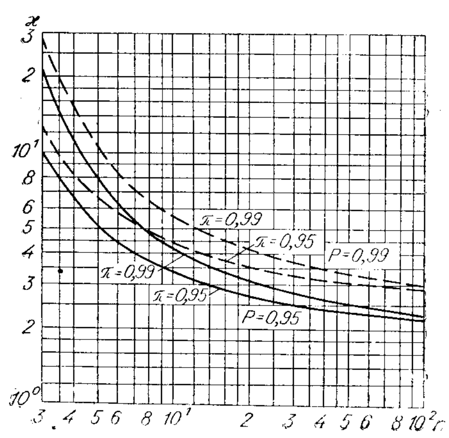

Рис. 1.

К чему приводит замена величины $\varkappa$ на k, видно из сравнения рис. 2, *а* и *б*. На рис. 2, *а* построены графики плотностей распределения доли P, содержащейся внутри случайных границ $\bar{\delta}\pm1{,}96s$, для выборок разного объема n из нормальной совокупности. На рис. 2, *б* приведены графики плотностей распределения доли P, содержащейся внутри случайных границ $\bar{\delta}\pm\varkappa s$.

Легко обнаружить, что достоверность оценки интервала I_P^0 по (1) при $P=0{,}95$ и $k=1{,}96$ не превышает 0,5. С другой стороны, использование вместо k величины $\varkappa$ приводит к тому, что графики плотностей распределения долей P, заключенных внутри случайных границ $\bar{\delta}\pm\varkappa s$, смещаются вправо. Достоверность оценки одинакова при всех n и равна заданной величине π.

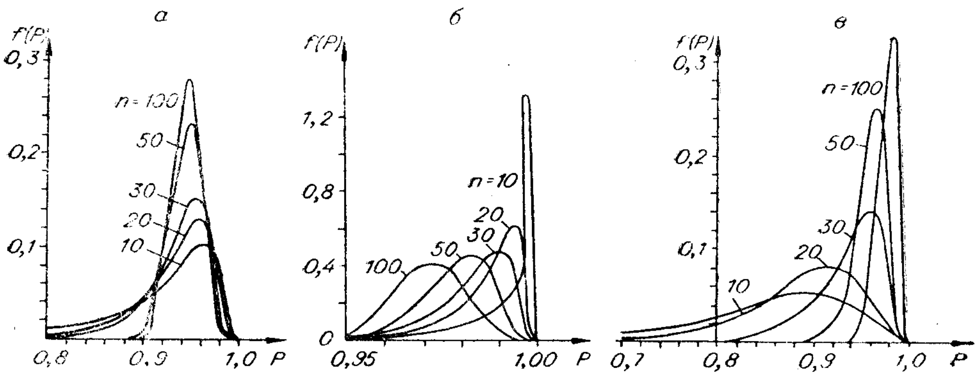

Рис. 2.

Дополнительной иллюстрацией этого являются графики рис. 3, где приведены зависимости математического ожидания долей генеральной совокупности P внутри интервалов с границами $\bar{\delta}\pm1{,}96\,s$ (кривая *1*) и $\bar{\delta}\pm\varkappa s$ (кривая *2*). Оказывается, что при $k=1{,}96$ математическое ожидание доли P всегда меньше 0,95, в то время как использование вместо k величины $\varkappa$ приводит к тому, что заданная величина P в среднем превышает величину 0,95 для любого n.

Представляет интерес оценка I_P^0 при помощи размаха w. Результаты соответствующего оценивания при различных n иллюстрируются рис. 2, *в* и 3 (кривая *3*). Кривые рис. 2, *в* представляют плотности распределения доли P генеральной совокупности внутри интервала, заключенного между крайними членами выборки объема n. Начиная с некоторого n, оценка I_P^0 с помощью размаха w оказывается достаточно надежной. Однако вопросы использования размаха w для оценки I_P^0 нормальной генеральной совокупности с необходимой надежностью π в настоящее время не изучены в полной мере и требуют подробной проработки.

Как видим, использование в качестве коэффициента k квантилей нормального распределения $N(0{,}1)$ для оценки интервала I_P^0 по формуле (1) может привести к существенным ошибкам даже в случае, когда исследуемая генеральная совокупность нормальна. Если же распределение генеральной совокупности отлично от нормального, то границы $\bar{\delta}\pm ks$ могут оказаться настолько неточными, что их использование для оценки интервала I_P^0 потеряет смысл.

Непараметрическая оценка I_P^0 в случае произвольного распределения погрешностей. Допустим, что функция распределения случайных погрешностей непрерывна. Тогда для оценки интервала I_P^0 применимы непараметрические методы, основанные на понятии статистически эквивалентных блоков [1, 5].

Опишем процедуру непараметрического оценивания интервала I_P^0. Пусть в результате n измерений получены выборочные значения случайных погрешностей $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$. Вычислим среднее $\bar{\delta} = \frac{1}{n} \sum \delta_i$ и отцентрируем исходную выборку $(\delta_1^0, \delta_2^0, \ldots, \delta_n^0)$, где $\delta_i^0 = \delta_i - \bar{\delta}$. Составим новую выборку, членами которой являются модули элементов выборки $\{\delta_i^0\}$, $i = 1, \ldots, n: (y_1, y_2 \ldots, y_n)$, $(y_i = |\delta_i^0|)$. Множество значений $\{y_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ представляет собой выборку из генеральной совокупности, образованной случайной величиной $y = |\delta - E(\delta)|$, где $E(\delta)$ есть математическое ожидание случайной величины δ. Расставим элементы новой выборки в порядке возрастания. Получим вариационный ряд:

$$y_{(1)}, y_{(2)}, \ldots, y_{(n)}. \tag{3}$$

Если функция распределения величины δ непрерывна, то непрерывной будет функция распределения $F(y)$ величины y; поэтому к случайной величине y применимы непараметрические методы оценки выборочных долей посредством подсчета количества статистических эквивалентных блоков [1], границы которых определяются элементами ряда (3). Элемент ряда (3), стоящий на k-м месте, называется k-й порядковой статистикой. Все порядковые статистики делят полуось $[0, \infty)$ на $(n+1)$ полуоткрытый интервал $[0, y_{(1)})$, $[y_{(1)}, y_{(2)}), \ldots, [y_{(n)}, \infty)$. Эти интервалы называются статистически эквивалентными блоками, поскольку они содержат равные доли генеральной совокупности. Обозначим эти доли через v_i.

В качестве оценки верхней границы интервала I_P^0 выберем величину $\bar{\delta} + y_{(r)}$. С целью определения значения r исследуем распределение суммы выборочных блоков

$$P = \sum_{i=1}^{r} v_i. \tag{4}$$

Эта сумма вне зависимости от распределения случайной величины δ (лишь бы существовала плотность δ) имеет функцию распределения [1]

$$F(r, P) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\,\Gamma(n-r+1)} \int_0^P z^{r-1} (1-z)^{n-r}\, dz,$$

где $\Gamma(n)$ — гамма-функция. В дальнейшем нам удобнее будет пользоваться величиной $k = n - r + 1$.

Если величина P задана, а n и k фиксированы, то сумма блоков (4) оценивает заданную вероятность с надежностью

$$\pi = 1 - I_P(n-k+1, k), \tag{5}$$

где $I_P(n-k+1, k)$ — неполная бета-функция;

$$I_P(n, m) = \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\,\Gamma(m)} \int_0^P z^{n-1} (1-z)^{m-1}\, dz.$$

Легко видеть, что указанная непараметрическая оценка интервала I_P^0 будет обладать гарантированной надежностью π при определенных соотношениях между P, n, k, вытекающих из (5). В [5] приведены графики зависимости P от n для $k=1(1)$, $k=6(2)$, $k=10(5)$, $k=30(10)$, $k=60(20)$, $k=100$, $\pi=0{,}9$, $\pi=0{,}95$, $\pi=0{,}99$ и $n=1\div 500$. Эти графики нами были расширены до значений $n=6000$. На основании полученных зависимостей для $P=0{,}95$, $P=0{,}99$ и $\pi=0{,}95$, $\pi=0{,}99$ построены кривые $k(n)$, которые представлены на рис. 4 и непосредственно используются при оценивании I_P^0. Если $P=0{,}95$, $\pi=0{,}95$, то минимальный объем выборки n, необходимый для оценки I_P^0 по последнему члену вариационного ряда (3) (при $k=1$), равен 59.

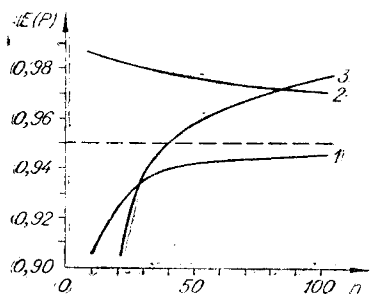

Рис. 3.

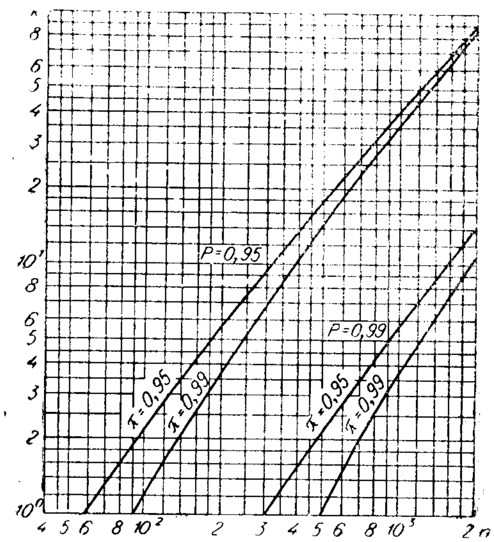

Рис. 4.

Если величины k и n определяются из графиков рис. 4, то с достоверностью π можно утверждать, что внутри границ $(\bar{\delta}+y_{(n-k+1)}, \bar{\delta}-y_{(n-k+1)})$ содержится не менее $P\cdot 100\%$ генеральной совокупности случайных погрешностей. В том случае, когда объем выборки больше минимально необходимого при заданных P и π, то, пользуясь графиками рис. 4, можно найти необходимое целое $k \geqslant 1$ путем выделения целой части из значения k, определяемого графиком.

ВЫВОДЫ

Если говорить об оценке и нормировании интервальных характеристик случайных погрешностей, то речь может идти об интервале I_P таком, что $P\{\delta \in I_P\}=P$. Для определенности интервал I_P^0 выбран симметричным относительно $E(\delta)$. В качестве оценки I_P^0 целесообразно использовать толерантные пределы.

Параметрическая оценка I_P^0, строго говоря, возможна только тогда, когда $\delta \sim N(E(\delta), \sigma^2)$. Использование в (1) в качестве квантилей распределения N (0,1) может привести к значительным ошибкам оценивания, возрастающим с уменьшением n.

При произвольном распределении погрешностей возможно непараметрическое оценивание I_P^0 с помощью графиков рис. 4.

Примеры построения графиков рис. 1—4 показывают возможность получения подобных графиков для любых значений n, P, π. Произведенное авторами расширение таблиц [5] позволило соответственно расширить графики рис. 4 от $n=500$ до $n=2000$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
2. Н. В. Смирнов, Л. Н. Большев. Таблицы математической статистики. М., ВЦ АН СССР, 1968.
3. РТМ 44-62. Методика статистической обработки эмпирических данных. М., Стандарты, 1965.
4. Illig Werner. The Determination of the Tendency to Error and its Significance in Practice.— Microtechnic, 1968, v. 22, № 7 (Экспресс-информация, Контрольно-измерительная техника, 1969, № 13).
5. R. B. Murphy. Non-parametric Tolerance Limits.— Annals of Math. Stat., 1948, v. 19.

Поступила в редакцию
25 декабря 1970 г.