АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1971

ТЕОРИЯ СИСТЕМ ВОСПРИЯТИЯ И ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

УДК 621.317.088.24

Р. А. ПОЛУЭКТОВ, Г. Н. СОЛОПЧЕНКО
(Ленинград)

МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Общая постановка задачи. Рассмотрим измерительную систему (рис.1) как преобразователь сигналов. Подлежащий измерению сигнал $s(t, \xi_0)$ представляет собой в общем случае реализацию случайного процесса $s(t, \xi)$. Этот сигнал поступает на вход линейного стационарного измерительного прибора с весовой функцией $h(\tau)$, на выходе которого регистрируется реализация случайного процесса $y(t, \xi)$, представляющего собой аддитивную смесь идеального сигнала $x(t, \xi)$ и помехи $n(t, \xi)$. Задача измерения заключается в построении преобразователя K, дающего на выходе сигнал $z(t, \xi)$, по возможности близкий к желаемому процессу $d(t, \xi)$. Здесь и далее через ξ обозначено элементарное событие. Предполагается, что заданы $\{\Xi, B, P\}$, где Ξ — измеримое пространство элементарных событий с σ-алгеброй B ξ-множеств, на которой определена вероятностная мера P. Когда $\xi=\xi_0$ фиксировано, то $s(t, \xi_0)$ [соответственно $n(t, \xi_0)$] — реализация. В дальнейшем при обозначении реализаций величину ξ_0 иногда будем опускать.

В качестве желаемого сигнала в каждом конкретном случае выбирается то или иное линейное преобразование от полезного сигнала $s(t, \xi)$:

$$d(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} D(t, \tau)\, s(\tau, \xi)\, d\tau. \tag{1}$$

Когда необходимо определить непосредственно сигнал $s(t, \xi)$, имеем $D(t, \tau) = D(t-\tau) = \delta(t-\tau)$; $d(t, \xi) = s(t, \xi)$. В общем случае преобразование (1) может быть любым, в том числе и физически нереализуемым.

Ошибка измерения равна

$$e(t, \xi) = d(t, \xi) - z(t, \xi) = (D - KH)\, s(\tau, \xi) - Kn(\tau, \xi), \tag{2}$$

где через D, H и K обозначены соответственно операторы желаемого преобразователя, измерителя и корректирующего фильтра

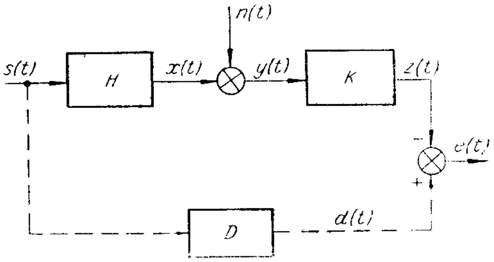

Рис. 1.

(см. рис. 1). Идеальное решение задачи измерения заключается в выборе такого преобразователя K^*, при котором ошибка измерения $e(t, \xi)$ тождественно равна нулю. Однако очень часто осуществить это практически невозможно. Это связано со следующими обстоятельствами: а) обратный оператор измерителя H^{-1} может быть неустойчивым или физически нереализуемым; б) желаемый оператор может быть физически нереализуемым; в) ошибка измерения является случайной. Поэтому коррекция динамических погрешностей, как правило, может быть выполнена лишь приближенно, с точностью, зависящей от конкретных свойств измерительного прибора и измеряемых сигналов.

Отметим, что даже в наиболее благоприятной ситуации, когда желаемый оператор D есть оператор тождественного преобразования E, а ошибки измерения выходного сигнала отсутствуют, задача восстановления реализации измеряемого сигнала $s(t, \xi_0)$ по выходу прибора является некорректной в классическом смысле. Действительно, для нахождения $s(t)$ необходимо решить относительно $s(t)$ интегральное уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\, s(\tau)\, d\tau = x(t) \tag{3}$$

или эквивалентное ему дифференциальное уравнение

$$P(d)s = Q(d)x; \quad d = d/dt. \tag{4}$$

Из-за наличия ошибок $n(t_1\xi)$ приходится находить оценку сигнала $s(t_1\xi_0)$ из уравнений:

$$\int\limits_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\, s(\tau)\, d\tau = y(t); \tag{5}$$

$$P(d)s = Q(d)y; \quad d = d/dt, \tag{6}$$

где $y(t) = x(t) + n(t)$. Пусть $h(\tau) \in L_2[0, \infty)$, что всегда выполняется, если степень полинома $Q(d)$ превосходит степень $P(d)$ и система устойчива. Обозначим через $s_y(t)$ некоторое решение (3), соответствующее $y(t)$. Тогда $s_1(\tau) = s_y(\tau) + \sin\omega\tau$ — решение этого же уравнения с правой частью

$$y_1(t) = y(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} h(t-\tau) \sin\omega\tau\, d\tau = y(t) + y_\omega(t).$$

При $\omega \to \infty$ y_ω неограниченно уменьшается. В то же время разность $s_y(\tau) - s_1(\tau) = \sin\omega\tau$ остается конечной величиной. Таким образом, для (3) нарушено третье условие корректности в классическом смысле, поскольку отсутствует непрерывная зависимость решения от правой части. Если измеритель является неминимально-фазовым, т. е.

$$P(d) = (d - \alpha) P_1(d); \; \alpha > 0, \tag{7}$$

аналогичное рассуждение справедливо также для двух решений вида $s_y(\tau)$ и $s_y(\tau) + \varepsilon e^{\alpha\tau}$. Малая погрешность в правой части может при этом вызвать ошибку в определении сигнала, неограниченно растущую во времени. Все сказанное свидетельствует о том, что непосредственное решение задачи восстановления сигнала по данным измерений, как это

---

* Свойства сигналов $s(t, \xi)$ и $n(t, \xi)$ и характеристики измерителя H и преобразователя D обычно заданы, и свобода их выбора отсутствует.

предлагается, например, в [1—3], не представляется возможным и что необходимо развить специальный подход к решению поставленной задачи.

Следует отметить, что методы коррекции динамических погрешностей в сильной степени определяются характером исходных данных задачи. Ниже мы будем рассматривать случаи, когда:

1) весовая функция измерительного прибора $h(\tau)$ интегрируема с квадратом, статистические характеристики сигнала и шума известны;

2) весовая функция интегрируема с квадратом, обратный оператор H^{-1} существует и непрерывен на некотором компактном множестве $M \subset L_2[0, \infty]$, на котором известна автокорреляционная функция шума $n(t, \xi)$, статистические характеристики сигнала $s(t, \xi)$ неизвестны;

3) весовая функция интегрируема с квадратом, обратный оператор не существует нигде в $L_2[0, \infty)$, мощность шума практически равна нулю.

Фильтр Колмогорова — Винера. Когда полезный сигнал $s(t, \xi_0)$ и помеха $n(t, \xi_0)$ являются реализациями стационарных случайных процессов с известными корреляционными функциями $R_{ss}(\tau)$, $R_{sn}(\tau)$ и $R_{nn}(\tau)$, для решения поставленной задачи можно воспользоваться общим подходом, развитым в теории Колмогорова — Винера. Примем в качестве меры близости сигнала на выходе корректирующего фильтра $z(t_1 \xi)$ к желаемому сигналу $d(t, \xi)$ дисперсию ошибки

$$D_e = E_{\Xi} \{e^2(t, \xi)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ee}(j\omega)\, d\omega, \tag{8}$$

где $\Phi_{ee}(j\omega)$ — спектральная плотность мощности ошибки измерения. Для $\Phi_{ee}(j\omega)$ имеем

$$\Phi_{ee}(j\omega) = \Phi_{dd}(j\omega) - K(-j\omega)\,\Phi_{zd}(j\omega) - K(j\omega)\,\Phi_{dz}(j\omega) + $$
$$+ K(-j\omega)\,K(j\omega)\,\Phi_{zz}(j\omega), \tag{9}$$

где

$$\Phi_{dd}(j\omega) = D(-j\omega)\,D(j\omega)\,\Phi_{ss}(j\omega);$$

$$\Phi_{zd}(j\omega) = \Phi_{dz}(-j\omega) = H(-j\omega)\,D(j\omega)\,\Phi_{ss}(j\omega) + D(j\omega)\,\Phi_{ns}(j\omega);$$

$$\Phi_{zz}(j\omega) = H(-j\omega)\;H(j\omega)\,\Phi_{ss}(j\omega) + H(-j\omega)\,\Phi_{sn}(j\omega) +$$
$$+ H(j\omega)\,\Phi_{ns}(j\omega) + \Phi_{nn}(j\omega);$$

$\Phi_{ss}(j\omega)$, $\Phi_{nn}(j\omega)$, $\Phi_{sn}(j\omega)$ — спектральные плотности соответственно сигнала, шума и перекрестная спектральная плотность сигнал/шум.

Будем разыскивать такой корректирующий фильтр, который доставляет минимум дисперсии ошибки $D_e(8)$ и является при этом физически реализуемым.

Тогда, как известно, для передаточной функции фильтра $K(j\omega)$ можно получить интегральное уравнение, которое в частотной области имеет вид [4]

$$\Phi_{zz}(j\omega)\,K(j\omega) - \Phi_{zd}(j\omega) = Q_{-}(j\omega), \tag{10}$$

где $Q_{-}(j\omega)$ — функция комплексной переменной ω, аналитическая в нижней полуплоскости плоскости ω. Следует отметить, что численное решение уравнения (10) во временной области является некорректной задачей и требует применения методов регуляризации [5]. В то же время преобразователь $K(j\omega)$, построенный таким образом, является оптимальным для целого класса сигналов $s(t, \xi)$ и помех $n(t, \xi)$ и не зависит от их конкретной реализации.

Статистически регуляризованный фильтр. Рассмотрим задачу коррекции динамических погрешностей, когда статистические характеристики сигнала $s(t, \xi)$ неизвестны, ядро оператора H (т. е. весовая функция) интегрируемо с квадратом, а обратный оператор H^{-1} существует и непрерывен на некотором множестве M, компактном в пространстве $L_2[0, \infty)$ всех реализаций процесса $y(t, \xi)$. Кроме того, естественно предположить, что реально все искомые реализации сигнала $s(t, \xi)$ принадлежат множеству функций $N \subset L_2[0, \infty)$ непрерывных, гладких (в смысле непрерывной дифференцируемости), ограниченных по модулю и по норме в $L_2[0, \infty)$.

Пусть $D=E$. Тогда задача сводится к решению уравнения (3) и формулируется как построение обратного фильтра [6, 7]. Как было отмечено выше, задача решения уравнения (3), вообще говоря, не является корректной в классическом смысле, а ее решение не является устойчивым по отношению к ошибкам в $y(t, \xi)$. Однако ограничения, наложенные нами на оператор H, и предполагаемое решение делают эту задачу корректной по А. Н. Тихонову [8, 9], и для нее существует единственное устойчивое приближенное решение, которое следует находить, используя регуляризующие алгоритмы [7—9].

Идея регуляризации состоит в том, что для каждой реализации $y(t, \xi_0)$ строят сходящуюся последовательность решений $\{s_r^\alpha\}$ классически корректных задач, обеспечивая при каждом r, α принадлежность s_r^α некоторому компактному множеству. Эта последовательность строится таким образом, чтобы ее предельной точкой было точное решение уравнения (3), соответствующее точным данным $(n(t, \xi)=0)$. Однако метод регуляризации [8] не учитывает случайного характера ошибок [10] и поэтому к рассматриваемому случаю применен быть не может. Кроме того, реализация метода [8] затруднена выбором параметров регуляризации.

Ниже сформулирован статистический метод оценивания решения (3) из (5). Пусть $s(t, \xi_0)$, $y(t, \xi_0)$ — реализации, принадлежащие $L_2[0, \infty]$; $n(t, \xi)$ — помеха (может быть, нестационарная) с известной автокорреляционной функцией $R_{nn}(t_1, t_2)$; $E_\xi\, |n(t, \xi)| = 0$. Обычно выходной сигнал $x(t)$ измеряется в дискретные моменты времени t_j ($\Delta t = t_j - t_{j-1} = \text{const}$. Эти моменты времени образуют точечное множество $T_1 = \{t_j\}$, для которого уравнение (3) принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{t_j} h\,(t_j - \tau)\, s\,(\tau)\, d\tau = x\,(t_j);\ j = 1, 2, \ldots, l. \tag{11}$$

Метод приближенного решения уравнения (3), который сводится к определению $s(t)$, удовлетворяющего (11), называется методом коллокаций [11]. Обозначим через $s_l^0(t)$ решение (3), удовлетворяющее (11). Условия сходимости приближенного решения $s_l^0(t)$ к точному решению уравнения (3) при $l \to \infty$, каждом фиксированном сколь угодно большом T $(T_1 \subset [0, T]$, $T < \infty)$, а также выбор точек коллокаций $\{t_j\}$, обеспечивающий наибольшую скорость этой сходимости, обсуждаются в [11]. Условия сходимости на практике обычно выполняются.

Очевидно, что в результате дискретизации в правых частях уравнений (3) и (5) мы получим векторы, причем вектор $\vec{n}(\xi) = \{n(t_j, \xi)\}$ является случайным с ковариационной матрицей Σ.

Будем искать решение в форме разложения по полной системе функций $\{\varphi_k(t)\}$, ортогональных в $L_2[0, \infty)$:

$$s_r^\sigma(t) = \sum_{k=0}^{r} a_k \varphi_k(t);\ r \leqslant l - 1. \tag{12}$$

Здесь верхний индекс σ означает фиксированную величину дисперсии шума $n(t, \xi)$. С учетом того, что весовая функция $h(\tau)$ известна, интеграл в левой части (11) может быть вычислен для каждого $j = 1, 2, \ldots, l$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{r} \beta_{jk} a_k = x(t_j);\ j = 1, 2, \ldots, l$$

или в матричном виде

$$B_r a = x, \tag{13}$$

где B_r — матрица размером $l \times (r+1)$, $l > r+1$, $B_r = \{\beta_{jk}\}$; a — вектор коэффициентов a_k; $x = \{x(t_j)\}$; $j = 1, 2, \ldots, l$.

Можно выбрать $\{\varphi_k\}$ так, чтобы оператор в (11) не склеивал никакие две из них. Тогда при $r = l - 1$ матрица B_{l-1} будет неособенной и, по крайней мере, в принципе можно найти точное единственное решение s_l^0:

$$s_l^0(t) = \sum_{k=0}^{l-1} a_k^0 \varphi_k(t). \tag{14}$$

Однако в этом случае матрица B_{l-1} бывает обычно плохо обусловленной. Это приводит к тому, что даже такие незначительные ошибки, как ошибки округления при вычислениях на ЭВМ, могут привести к существенным погрешностям в решении [12]. Легко видеть, что наличие погрешностей $n(t, \xi)$, которые в большинстве случаев значительно превышают ошибки вычислений, может привести к потере физического смысла решения.

Пусть $n(\xi) = \{n(t_j, \xi)\}$ — случайный вектор, а $n = n(\xi_0)$ — его реализация (выборочный вектор). Поскольку $y(t_j) = x(t_j) + n(t_j)$ на практике вместо решения уравнения (13) обычно приходится оценивать вектор $a^0 = \{a_k^0\}$ из уравнения

$$B_r a = y;\ r \leqslant l - 1;\ y = \{y(t_j)\};\ j = 1, 2, \ldots, l. \tag{15}$$

Пусть для оценивания вектора a^0 выбран метод наименьших квадратов. Он позволяет получить несмещенные и эффективные оценки в классе линейных даже при произвольном распределении вектора $n(\xi)$ [13]. Этот метод предписывает преобразовать уравнение (15)

$$\sum^{-\frac{1}{2}} B_r a = \sum^{-\frac{1}{2}} y \tag{16}$$

и решать его путем минимизации эвклидовой нормы невязки. Это решение может быть получено при помощи псевдообратных матриц [14]:

$$\tilde{a}_r = \Big(\sum^{-\frac{1}{2}} B_r\Big)^+ \sum^{-\frac{1}{2}} y;\ \ r \leqslant l - 1. \tag{17}$$

Оценкам $\tilde{a}_r$ соответствует оценка

$$s_r^\sigma(t) = \sum_{k=0}^{r} (\tilde{a}_k)_r \varphi_k(t) \tag{18}$$

решения $s_l^0(t)$ из (14).

Составим корреляционную матрицу Σ случайного вектора $n(\xi)$, пользуясь известной функцией $R_{nn}(t_1, t_2)$ так, чтобы

$$\sum = \{R_{ij}\} = \{R_{nn}(i\Delta t, j\Delta t)\}; \; i, j = 1, \ldots, l.$$

Назовем точным l-решением задачи (при дискретных отсчетах) решение (14), где $a^0 = \{a_k^0\}$ — решение системы (13) при $r = l - 1$, $\Sigma = 0$ и отсутствии ошибок вычислений.

Назовем последовательность решений $\{s_\rho^\sigma\}$ статистически регуляризованной, если 1) при всяком значении $\rho \leqslant l - 1$ оценка $s_\rho^\sigma(t)$ вида (18) существует и единственна: 2) при $sp\sum \to 0$ последовательность $\{s_\rho^\sigma\}$ сходится к точному l-решению по вероятности, т. е. для любого $\delta > 0$

$$P\{\| s_\rho^\sigma(t) - s_l^0(t)\|_{L_2}^2 \geqslant \delta\} \to 0.$$

Опишем процедуру построения статистически регуляризованной последовательности. Вначале укажем, что при построении последовательности полезно $\{S_\rho^\sigma\}$ начинать с малых ρ, поскольку можно показать, что обусловленность матрицы B_r улучшается при уменьшении r и вместе с тем улучшается устойчивость решения. Кроме того, заметим, что при любом $r \leqslant l - 1$, по свойству псевдообратных матриц [14] решение (17) единственно, даже если матрица $\sum^{-\frac{1}{2}} B_r$ особенная. Таким образом, последовательность решений строится, начиная с минимального значения $\rho = r$, например, с $r = 0$. Подставляя в (17) $r = 1$, можно найти оценки a_0. Затем, подставляя $\widetilde{a}_0$ в (18), можно определить y_0 и по критерию χ^2 при заданном уровне α проверить гипотезу H_0: $y = y_0$ против альтернативы H_1: $y \neq y_0$, где y — вектор правых частей в (15). Если отвергается H_0, r увеличивается на 1, находятся оценки $\widetilde{a}_1$, они подставляются в (18) и т. д. Если на ρ-м шаге гипотеза H_0 оказалась неотклоненной, в качестве решения задачи берется $s_\rho^\sigma = \sum_{k=0}^{0} (\widetilde{a}_k)_\rho \varphi_k(t)$.

Поскольку с вероятностью $1 - \alpha$ можно утверждать, что гипотеза H_0 справедлива при $r = \rho$, с этой же вероятностью можно утверждать, что оценки $(\widetilde{a}_k)_\rho$ являются несмещенными и эффективными оценками коэффициентов a_k^0, так как $(\widetilde{a}_k)_\rho$ суть оценки наименьших квадратов.

Опуская доказательства того факта, что полученные оценки удовлетворяют условиям 1 и 2 при любой Σ, заметим, что изложенное выше справедливо, когда ошибки вычислений, приведенные к правой части уравнения (13), значительно меньше ошибок измерений $n(t_j, \xi)$. В противном случае может оказаться, что ни при каком $r \leqslant l - 1$ гипотеза H_0 не будет принята. При этом следует увеличить l с тем, чтобы воспользоваться полученной избыточностью для повышения устойчивости решения. Очевидно, что ошибки вычислений, приведенные к правой части (13), будут уменьшены. Для уменьшения ошибок вычислений следует увеличить разрядность ЭВМ, если это возможно.

Описанная процедура представляет собой численную реализацию корректирующего фильтра с оператором K_s° (рис. 2). От метода, изложенного в [15], она отличается тем, что статистический подход здесь используется не только при постановке задачи, но и для отыскания решения. При этом отпадает необходимость в определении параметров регуляризации. Совершенно очевидно, что построение статистически регуляризованного обратного фильтра зависит от конкретной реализации процесса $s(t, \xi)$ и, значит, от $y(t, \xi)$. В этом заключается «плата» за отсутствие априорных сведений о статистических характеристиках сигнала $s(t, \xi)$.

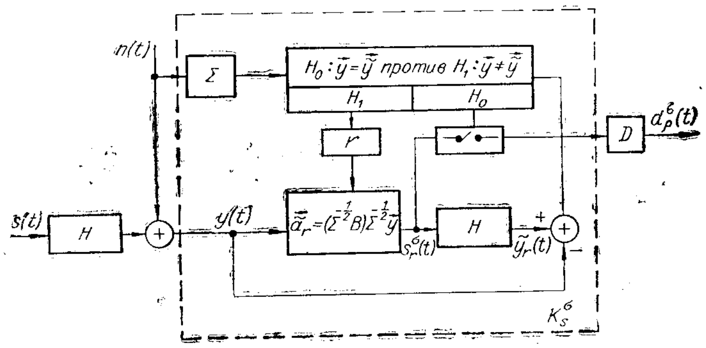

Рис. 2.

Если оператор D отличен от E и физически реализуем, то

$$d_\rho^\sigma = D\, s_\rho^\sigma\ (t). \tag{19}$$

В случае физической нереализуемости оператора D желаемый сигнал может быть получен по (1) и (17) посредством аналитического преобразования. Поскольку s_ρ^σ — решение метода наименьших квадратов [14], s_ρ^σ — несмещенная и эффективная оценка l-решения s_l^0 в классе линейных [13], а линейное преобразование (19) — также несмещенная и эффективная оценка реализации $d_l^0\,(t) = D\, s_l^0\,(t)$.

Псевдообратный фильтр. Задача построения корректирующего фильтра, дающего наилучшее приближение сигнала на выходе $z(t, \xi)$ к желаемому процессу $d(t, \xi)$ при условии, что вероятностные характеристики сигналов известны, рассмотрена выше. Известно, что получение таких характеристик в большинстве случаев связано со значительными трудностями и иногда вообще невозможно.

В то же время такие общие свойства сигналов, как непрерывность, существование производных до некоторого порядка, часто известны. Поэтому целесообразно попытаться построить оператор K (см. рис. 1), дающий наилучшее в некотором смысле приближение $z(t, \xi)$ к сигналу $d(t, \xi)$ (или $s(t, \xi)$), принадлежащему достаточно широкому классу. От требования предварительного знания вероятностных характеристик измеряемого процесса $s(t, \xi)$ удалось избавиться (см. выше). Однако там, по существу, решалась не задача построения обратного оператора H^{-1}, а задача восстановления входного сигнала по реализации, полученной на выходе прибора. Именно с этим обстоятельством и связан тот факт, что характеристики корректирующего фильтра K_s^σ оказались зависящими от вида реализации сигнала $s(t, \xi_0)$. А это, в свою очередь, затрудняет реализацию полученного алгоритма как на аналоговых, так и на цифровых вычислительных машинах.

Ниже будут даны постановка и решение задачи построения корректирующего фильтра, не зависящего от специфических характеристик сигнала $s(t, \xi)$ и учитывающего лишь весьма общие его свойства. Полученное решение справедливо для целого класса сигналов. Поэтому точность решения при наличии существенных динамических искажений в принципе не может быть высокой. Достоинством же метода является простота реализации.

Рассмотрим случай, когда ошибка измерения достаточно мала, так что ее можно не учитывать. Будем считать также, что желаемый сигнал совпадает с измеряемым полезным сигналом $s(t, \xi)$. Эта ситуация иллюстрируется рис. 3. Возникает соблазн выбрать в качестве преобразователя K устройство, реализующее обратный оператор измерителя H^{-1} (если он существует):

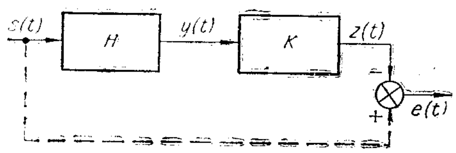

Рис. 3.

$$K = H^{-1}. \tag{20}$$

Покажем, что в общем случае это невозможно. Пусть стационарный линейный измеритель имеет передаточную функцию $H(p)$, являющуюся отношением двух полиномов

$$H(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}. \tag{21}$$

Физически реализуемый измеритель должен быть устойчивым, поэтому все нули полинома $Q(p)$ расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости p:

$$Q(p) = Q^{+}(p). \tag{22}$$

Числитель $H(p)$ не обязательно удовлетворяет аналогичному требованию и в общем случае может иметь нули как в правой, так и в левой полуплоскости:

$$P(p) = P^{-}(p)\,P^{+}(p). \tag{23}$$

Как показано в [16], выбор передаточной функции звена K в виде (20) приводит к появлению в системе ненаблюдаемых и неуправляемых частей, причем ненаблюдаемая часть (а с ней и система в целом) становится неустойчивой, как только нарушено условие

$$P^{-}(p) = 1.$$

Таким образом, требование устойчивости системы не позволяет выбрать корректирующий фильтр в виде обратного фильтра измерителя, если сам измеритель не является минимально фазовым звеном. Другое ограничение связано с соотношением степеней числителя и знаменателя $H(p)$. Действительно, если, например,

$$H(p) = \frac{k}{p+\alpha},$$

оператор $K(p) = \frac{1}{k}(p+\alpha)$ должен осуществлять физически нереализуемую операцию идеального дифференцирования.

Таким образом, осуществить точное обращение оператора H невозможно. В то же время можно поставить задачу приближенной аппроксимации H^{-1}.

В соответствии с общим подходом, развиваемым в настоящей работе, перейдем к эквивалентной схеме рис. 4, где $h(\tau)$ — весовая функция измерителя; H^{-1} — обратный оператор измерителя, играющий в данном случае роль желаемого оператора (напомним, что на желаемый оператор требование физической реализуемости не накладывается); K — искомый оператор корректора, разыскиваемый в классе физически реализуемых операторов. Задача аппроксимации

$$K_1 \sim H^{-1} \tag{24}$$

заключается в выборе такого оператора K, который минимизирует некоторый функционал (норму) ошибки $e(t)$. Будем считать, что оператор K принадлежит тому же классу, что и H. Так, если измеритель является стационарным звеном с дробно-рациональной передаточной функцией, корректор K будем также разыскивать как устойчивое стационарное звено с дробно-рациональной передаточной функцией.

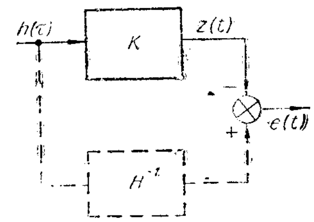

Рис. 4.

Очевидно, что воздействие $h(\tau)$ на желаемый оператор H^{-1} дает в качестве выходного сигнала δ-функцию, т. е. сигнал, соответствующий единичному оператору исходной системы. Схема рис. 4 не отражает требований, связанных со свойствами входного сигнала $s(t, \xi)$ системы. Очевидно, что такие свойства реализации $s(t, \xi_0)$ как дифференцируемость и существование производных определенного порядка накладывают ограничения лишь на соотношение степеней числителя и знаменателя передаточной функции $K(p)$. Эти ограничения всегда можно учесть, подчинив ядро $k(\tau)$ оператора K условиям

$$\mu_r^{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \tau^r e^{\varepsilon\tau} k(\tau)\, d\tau \leqslant Mr; \quad r = 0, 1, \ldots, l, \tag{25}$$

где ε — некоторая положительная константа. Оператор K, реализующий свойство близости к H^{-1} и удовлетворяющий условиям гладкости (25), связанным со свойствами входного сигнала, будем называть псевдообратным. Дадим более строгое о п р е д е л е н и е: псевдообратным оператором K_α^ε для стационарного линейного оператора H называется оператор, удовлетворяющий при заданных малых положительных α и ε соотношению

$$I = \min_k \left\{ \| H^{-1} h - K \|^2 + \alpha \sum_{r=1}^{l} [\mu_r^\varepsilon (K)]^2 \right\}, \tag{26}$$

где $\| H^{-1} h - K \| = \| e \|$ — некоторая норма ошибки аппроксимации; e, α, ε — параметры регуляризации. В случае, когда в качестве нормы ошибки выбран интегральный критерий

$$\left(\int_0^{\infty} e^2(t)\, dt \right)^{1/2},$$

решение задачи нахождения K_α^ε доводится до конца. В частности, при $e=0$ оператор K не зависит от α, ε и определяется как решение интегрального уравнения типа Винера — Хопера:

$$L(-j\omega) L(j\omega) K(j\omega) - L(-j\omega) = Q_-(j\omega).$$

В общем случае, решая (26), мы получаем регуляризованную последовательность решений K_α^ε, которая при $\alpha \to 0$ и $\varepsilon \to 0$ сходится к обратному оператору H^{-1}, если этот последний существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Васильев. Воспроизведение быстропротекающих процессов линейными регистрирующими системами.— Измерительная техника, 1965, № 1.
2. О. Н. Тихонов. Коррекция результатов измерения по динамическим характеристикам измерительных систем.— Измерительная техника, 1967, № 9.
3. D. Neuenfeld. Mathematischen Verfahren zur Korrektur dynamischer Meßfehler.— Messen, Steuern, Regeln, 1969, № 1.
4. Ш. С. Л. Ченг. Синтез оптимальных систем управления. М., «Машиностроение», 1964.
5. В. В. Солодовников, В. Л. Ленский. Синтез систем управления минимальной сложности.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1966, № 2.
6. O. E. Brigham, H. W. Smith, F. X. Bostick, W. C. Duesterhoeft. An Iterative Techniques for Determiniq Inverse Filters.— IEEE Trans. Geosci. Electron., 1968, v. 6, № 2.
7. R. L. Rhoads, M. P. Ekstrom. Removal of Interserning System Distortion by Deconvolution.— IEEE Trans. Instrum. and Measur., 1968 (1969), v. 17, № 4.
8. А. Н. Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач.— Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 1.
9. Л. С. Кириллова, А. А. Пионтковский. Некорректные задачи в теории оптимального управления (обзор).— Автоматика и телемеханика, 1968, № 10.
10. В. Н. Судаков, Л. А. Халфин. Статистический подход к корректности задач математической физики.— Докл. АН СССР, 1965, т. 157.
11. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко. Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.
12. Л. Коллатц. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.. «Мир», 1969.
13. С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968.
14. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
15. А. Б. Бакушинский. О построении регуляризующих алгоритмов при случайных помехах.— Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 2.
16. В. Я. Катковник, Р. А. Полуэктов. Многомерные дискретные системы управления. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
30 июня 1970 г.