А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 5 1971

УДК 621.317.3+53.088+519.24

Э. И. ЦВЕТКОВ
(Ленинград)

О МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЯХ ИЗМЕРЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Интенсивные исследования в области, условно называемой «статистические измерения» и охватывающей круг проблем, связанных с измерениями статистических характеристик случайных процессов и полей, ведутся в следующих основных направлениях: разработка методов измерения, синтез соответствующих алгоритмов и их анализ; разработка средств измерения, т. е. решение задач аппаратурной реализации эффективных методов; разработка метрологического обеспечения средств аппаратурного анализа случайных процессов. Следует отметить, что если методам и средствам измерения статистических характеристик случайных процессов посвящено много работ, то разработке метрологического обеспечения существенно меньше.

В настоящее время, помимо работ, в которых исследуются отдельные виды погрешностей [1, 2], уже можно назвать несколько, посвященных собственно проблеме метрологического обеспечения, т. е. созданию совокупности методов нормирования погрешностей, методов и средств аттестации измерителей статистических характеристик случайных прцессов [3—5]. В этих статьях ставятся общие вопросы метрологии случайных процессов, рассматриваются проблемы их классификации и эталонирования, а также обсуждаются пути дальнейших исследований в данной области. Примером использования общих положений в частных вопросах служит [6], где освещаются конкретные аспекты метрологического обеспечения корреляционного анализа.

Таким образом, можно констатировать, что метрологическому обеспечению средств аппаратурного анализа случайных процессов уделяется все большее внимание, причем начинается планомерная проработка не только частных аспектов, но и общего подхода к этой проблеме.

В предлагаемой работе исследование ведется с общих позиций и охватывает не только стационарные эргодические, но и нестационарные неэргодические процессы. По-видимому, полученные результаты можно будет использовать как при разработке методов нормирования погрешностей статистических измерений, так и при синтезе методов измерений, а также при определении вида оптимальных операторов, соответствующих данному объему априорных сведений об условиях измерений.

По определению

$$\Theta\,[x\,(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g\,[x_i\,(t)], \tag{1}$$

где $g[x]$ — некоторый оператор, лежащий в основе определения характеристики $\Theta[x(t)]$; $\{x_i(t)\}$ — ансамбль реализаций, представляющий случайный процесс $x(t)$.

Измерение производится с помощью некоторого оператора оценки $S[x(t)]$, т. е.

$$\Theta^*[x(t)] = S[x(t)], \tag{2}$$

где $\Theta^*[x(t)]$ — результат измерения значения $\Theta[x(t)]$, полученный при использовании некоторой ограниченной совокупности независимых мгновенных значений процесса $x(t)$. В качестве оператора оценки $S[x(t)]$ можно применить идеальный интегратор

$$S_T\,[x\,(t)] = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} g\,[x\,(t')]\,dt' \tag{3}$$

или

$$S_N\,[x\,(t)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g\,[x\,(t)]. \tag{4}$$

Погрешность отдельного измерения равна

$$\Delta\Theta^*[x(t)] = \Theta[x(t)] - \Theta^*[x(t)]. \tag{5}$$

Ограничиваясь рассмотрением методической погрешности, определим ее составляющие не по их характеру — случайная и систематическая, а по причинам их вызывающим — ограниченность объема выборочных данных, смещенность оценки, несостоятельность оценки и восстановление промежуточных значений определяемой функции по конечному числу ее измеренных значений. Основанием для подобного подхода служит возможность проведения последовательного анализа составляющих методической погрешности, обусловленных различными факторами.

Поскольку погрешности восстановления адекватны хорошо изученным ошибкам аппроксимации, исключаем их из рассмотрения и ограничиваемся анализом первых трех составляющих применительно к четырем основным случаям: оценка несмещенная и состоятельная; оценка смещенная и состоятельная; оценка несмещенная и несостоятельная; оценка смещенная и несостоятельная.

1. Оценка несмещенная и состоятельная. В этом случае погрешность обусловлена только ограниченностью объема используемых при измерениях данных о мгновенных значениях исследуемого процесса. Для конкретности здесь и в дальнейшем будем полагать, что качество измерений определяется средним квадратом погрешности

$$< \Delta^2\Theta^*[\,x(t)] > = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \Delta^2\,\Theta_j^*\,[x\,(t)]. \tag{6}$$

Угловые скобки, как обычно, обозначают усреднение по совокупности. В данном случае производится усреднение по совокупности измерений. Определяем средний квадрат погрешности

$$<\{\Theta[x(t)]-\Theta^*[x(t)]\}^2>=$$
$$=<\Theta^2[x(t)]>+<\Theta^{*2}[x(t)]>-2<\Theta[x(t)]\Theta^*[x(t)]>. \quad (7)$$

Так как

$$<\Theta[x(t)]>=\Theta[x(t)];\quad <\Theta^2[x(t)]>=\Theta^2[x(t)];\quad <\Theta^*[x(t)]>=\Theta[x(t)],$$

то в силу несмещенности оценки имеем

$$<\Delta^2\Theta^*[x(t)]>=<\Theta^{*2}[x(t)]>-\Theta^2[x(t)]. \quad (8)$$

Данное соотношение является главным при определении погрешностей измерений, в основе которых лежит несмещенная и состоятельная оценка значений статистических характеристик.

Пусть текущая статистическая характеристика $\Theta(t)$ (определения текущей, локальной и средней статистических характеристик даны в [7]) находится с помощью оператора $S_N[x(t)]$, т. е.

$$\Theta_j^*(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=N_j-N}^{N_j} g[x_i(t)]. \quad (9)$$

Тогда

$$<\Theta^{*2}(t)>=\frac{1}{N^2}<\Big\{\sum_{i=N_j-N}^{N_j} g[x_i(t)]\Big\}^2>. \quad (10)$$

Если процесс обладает свойством текущей эргодичности [8] и его реализации некоррелированы, то

$$<\Theta^{*2}(t)>=\frac{1}{N}<g^2[x(t)]>. \quad (11)$$

В случае, когда реализации исследуемого процесса коррелированы, имеем*

$$<\Theta^{*2}(t)>=\frac{1}{N}<g^2[x(t)]>+\frac{2}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1}(N-i)R_g(i), \quad (12)$$

где $R_g(i)$ — функция корреляции мгновенных значений реализаций в момент времени t процесса $g[x(t)]$. В качестве аргумента взят интервал между реализациями. Имеется в виду, что пространство реализаций упорядочено, т. е. каждой реализации присвоен определенный индекс (номер). Характер упорядочения зависит от физических свойств рассматриваемого объекта — развития во времени, геометрии и т. п.

Из выражений (8) и (11) находим

$$<\Delta^2\Theta^*(t)>=\frac{1}{N}<g^2[x(t)]>-<g[x(t)]^2>, \quad (13)$$

а из (8) и (12)

$$<\Delta^2\Theta^*(t)>=\frac{1}{N}<g^2[x(t)]>+\frac{2}{N^2}\sum_{i=1}^{N-1}(N-i)R_g(i). \quad (14)$$

---

* Вывод данного соотношения опущен, так как аналогичная задача рассмотрена А. А. Харкевичем [9].

2. Оценка смещенная и состоятельная. Погрешность обусловлена, во-первых, ограниченностью объема используемых при измерениях данных о мгновенных значениях исследуемого процесса и, во-вторых, смещенностью оценки.

Средний квадрат погрешности, как и в предыдущем случае, определяем из соотношения (7). Так как из-за смещенности оценки

$$< \Theta^* [x(t)] > = \Theta [x(t)] + \Delta_{см} \Theta^* [x(t)], \quad (15)$$

то выражение (7) приводим к следующему виду:

$$< \Delta^2 \Theta^* [x(t)] > = < \Theta^{*2} [x(t)] > - \Theta^2 [x(t)] - \\ - 2\,\Theta [x(t)]\, \Delta_{см} \Theta^* [x(t)]. \quad (16)$$

Выражение (16) может быть представлено и в ином виде. Полагая, что две составляющие ошибки, обусловленные конечностью объема выборочных данных $\Delta_{кв} \Theta^*$ и смещенностью оценки $\Delta_{см} \Theta^*$, независимы, имеем

$$< \Delta^2 \Theta^* [x(t)] > = < \Delta^2_{кв} \Theta^* [x(t)] > + \Delta^2_{см} \Theta^* [x(t)]. \quad (17)$$

Решая совместно уравнения (16) и

$$\Theta^* [x(t)] = \Theta [x(t)] + \Delta_{см} \Theta^* [x(t)] + \Delta_{кв} \Theta^* [x(t)], \quad (18)$$

получим соотношение (17) при условии $< \Delta_{кв} \Theta^* [x(t)] > = 0$.

Рассмотрим случай, когда текущая статистическая характеристика $\Theta(t)$ определяется с помощью оператора $S_T [x(t)]$, т. е.

$$\Theta^*(t) = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} g[x(t')]\, dt. \quad (19)$$

При этом

$$< \Theta^*(t) > = < \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{T} g[x(t')]\, dt' > = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} \Theta(t')\, dt'; \quad (20)$$

$$\Delta_{см} \Theta^*(t) = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} \Theta(t')\, dt' - \Theta(t); \quad (21)$$

$$< \Theta^{*2}(t) > = < \frac{1}{T^2} \int \int\limits_{t-T}^{t} g[x(t')]\, g[x(t'')]\, dt'\, dt'' > =$$

$$= \frac{1}{T^2} \int \int\limits_{t-T}^{t} < g[x(t')]\, g[x(t'')] > dt'\, dt'' =$$

$$= \frac{1}{T^2} \int \int\limits_{t-T}^{t} \{< g[x(t')]\, g[x(t'')] > - < g[x(t') >^2\}\, dt'\, dt'' +$$

$$+ < g[x(t)] >^2 = \frac{1}{T^2} \int \int\limits_{t-T}^{t} R_g(t', t'')\, dt'\, dt'' + < g[x(t)] >^2 =$$

$$= \frac{1}{T} \int\limits_{-T}^{T} R_g(\tau)\, d\tau + < g[x(t)] >^2. \quad (22)$$

Таким образом, в соответствии с (16), учитывая полученные соотношения, найдем

$$<\Delta^2 \Theta^*(t)> = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} R_g(\tau)\, d\tau - \frac{2\Theta(t)}{T} \int_{t-T}^{t} \Theta(t')\, dt' + 2\Theta^2(t). \quad (23)$$

Имея возможность определить корреляционную функцию процесса $g[x(t)]$, можно вычислить средний квадрат погрешности для заданного вида текущей статистической характеристики $\Theta(t)$.

3. Оценка несмещенная и несостоятельная. Погрешность обусловлена, во-первых, ограниченностью объема используемых при измерениях данных о мгновенных значениях исследуемого процесса и, во-вторых, несостоятельностью оценки.

Формально, поскольку из-за несмещенности оценки $<\Theta^*[x(t)]> = \Theta[x(t)]$, для суммарной погрешности в данном случае справедливы соотношения (7) и (8). Однако из-за несостоятельности оценки появляется дополнительная составляющая погрешности $\Delta_{нс}\Theta^*[x(t)]$ и соотношение, аналогичное (7), выглядит иначе

$$<\Delta^2\Theta^*[x(t)]> = <\Delta^2_{кв}\Theta^*[x(t)]> + <\Delta^2_{нс}\Theta^*[x(t)]>. \quad (24)$$

При этом составляющие погрешности $\Delta_{нс}\Theta^*[x(t)]$ и $\Delta_{кв}\Theta^*[x(t)]$ находим по формулам:

$$\Delta_{нс}\Theta^*[x(t)] = \Theta[x(t)] - \Theta_{нс}[x(t)]; \quad (25)$$

$$\Delta_{кв}\Theta^*[x(t)] = \Theta_{нс}[x(t)] - \Theta^*[x(t)],$$

где

$$\Theta_{нс}[x(t)] = \lim_{d \to \infty} \Theta^*[x(t)] \neq \Theta[x(t)]; \quad (26)$$

d — параметр (N или T), характеризующий процедуру усреднения (по совокупности или по времени).

Если в выражение (24) подставить значения слагаемых, то получим непосредственно формулу (7) при условии

$$<\Theta_{нс}[x(t)]> = \Theta[x(t)].$$

Пусть для определения текущей статистической характеристики стационарного неэргодического случайного процесса $x(t)$ используется оператор $S_T[x(t)]$, т. е. измерение производится в соответствии с равенством (19). Тогда из формул (8) и (22) имеем

$$<\Delta^2\Theta^*[x(t)]> = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R_g(\tau)\, d\tau. \quad (27)$$

4. Оценка смещенная и несостоятельная. Погрешность обусловлена ограниченностью объема используемых при измерениях данных о мгновенных значениях исследуемого процесса, а также смещенностью и несостоятельностью оценки.

Формально из-за смещенности оценки для суммарной погрешности в этом случае справедливо соотношение (16). Однако выражение, аналогичное по структуре соотношению (17), приобретает другой вид

$$<\Delta^2\Theta^*[x(t)]> = <\Delta^2_{кв}\Theta^*[x(t)]> + <\Delta^2_{см}\Theta^*[x(t)]> + $$
$$+ <\Delta^2_{нс}\Theta^*[x(t)]>, \quad (28)$$

где

$$\Delta_{\text{см}}\Theta^*[x(t)] = \Theta[x(t)] - <\Theta^*[x(t)]>;$$
$$\Delta_{\text{нс}}\Theta^*[x(t)] = <\Theta^*[x(t)]> - \Theta_{\text{нс}}[x(t)];$$
$$\Delta_{\text{кв}}\Theta^*[x(t)] = \Theta_{\text{нс}}[x(t)] - \Theta^*[x(t)], \tag{29}$$

причем

$$<\Theta^*[x(t)]> = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\Theta_j^*[x(t)]; \tag{30}$$

$$\Theta_{\text{нс}}[x(t)] = \lim_{d\to\infty}\Theta_j^*[x(t)]. \tag{31}$$

Здесь d, как и выше,— параметр усреднения.

Рассмотренный материал позволяет сделать заключение, что при известном характере оценки (смещенная — несмещенная, состоятельная — несостоятельная) методические погрешности могут быть исследованы аналитически. Степень возможной детализации анализа определяется объемом априорной информации о свойствах процесса. Общие выводы о составе суммарной погрешности могут быть сделаны, если известен класс процесса (стационарный — нестационарный, эргодический — неэргодический) и даны тип оператора S_T, S_N и вид измеряемой статистической характеристики (текущая, локальная, средняя).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабурин и др. О погрешностях при использовании статистического метода для исследования объектов управления.— В сб. «Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления». Л., «Машиностроение», 1965.
2. W. B. Davenport, R. A. Johnson, D. Middlton, Stabilistical Errors in Measurements on Rundon Time Functions.— Journ. Appl. Phys., 1952, № 4. Перевод с англ.— В сб. «Определение параметров случайных процессов». Под ред. В. И. Чайковского. Киев. Гостехиздат УССР, 1962.
3. А. Ф. Котюк и В. В. Ольшевский. Вопросы метрологии случайных процессов и полей.— Труды I Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», т. 1. Новосибирск, 1968.
4. В. Я. Розенберг. Вопросы аппаратурной аппроксимации характеристик случайных процессов.— Труды I Всесоюзного симпозиума «Методы случайных процессов и полей», т. 1. Новосибирск, 1968.
5. В. Я. Володарский, В. Я. Розенберг и Н. А. Рубичев. Влияние на точность измерений несоответствия исследуемого объекта приписываемой ему модели.— Измерительная техника, 1969, № 7.
6. Е. Д. Колтик, В. П. Пиастро и Р. В. Яралошвили. Современное состояние и перспективы развития метрологии в области статистических измерений.— Измерительная техника, 1970, № 4.
7. В. В. Ольшевский и Э. И. Цветков. Особенности оценки текущих и средних статистических характеристик случайных процессов.— Труды I Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», т. 2. Новосибирск, 1968.
8. В. В. Ольшевский и Э. И. Цветков. Проблемы измерения статистических характеристик нестационарных и неэргодических случайных процессов.— Acta IMEKO, Vercailles, 1970.
9. А. А. Харкевич. Борьба с помехами. М.— Л., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
30 июня 1970 г.