АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 5 1971

УДК 681.2.082/083.519.2

Б. А. МОРЯКИН
(Новосибирск)

АЛГОРИТМ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ КОРРЕЛИРОВАННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОШИБКЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Оценивание сигнала $x(t)$ в точках $t_1, t_2, \ldots$ производится по результатам измерений $y_1, y_2, \ldots$, связанных с сигналом соотношением $y_i = x_i + \eta_i$, где $x_i = x(t_i)$; η_i — ошибка измерения при $t = t_i$. Наиболее полное освещение в литературе [1, 2] получил случай, когда сигнал $x(t)$ на интервале обработки t_1, t_n может быть представлен полиномом $x(t) = \sum_{s=1}^{m} a_s \varphi^s(t)$ и ошибки измерения некоррелированы, т. е. $M[\eta_i, \eta_j] = 0$ при $i \neq j$.

Ниже рассматривается задача фильтрации для более общей модели сигнала, из которой полиномиальная модель может быть получена как частный случай. Ошибки измерения предполагаются коррелированными. Сигнал и ошибка нестационарны.

Рассмотрим предварительно модели сигнала и ошибки. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ имеет регрессию порядка m, если для всех $i > m$ случайные величины связаны соотношением

$$x_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i-1} + \cdots + \beta_m x_{i-m} + \xi_i, \tag{1}$$

где ξ_i — случайная величина, первые два момента которой равны: $M[\xi_i] = 0$; $M[\xi_i^2] = \sigma^2_{\xi_i}$. Вводя обозначения разностей

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1};\ \Delta^2 x_i = \Delta x_i - \Delta x_{i-1}; \ldots$$
$$\ldots;\ \Delta^{m-1} x_i = \Delta^{m-2} x_i - \Delta^{m-2} x_{i-1},$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$x_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1} + \cdots + \alpha_m \Delta^{m-1} x_{i-1} + \xi_i. \tag{2}$$

В частном случае, при

$$\alpha_0 = 0,\ \xi_i = 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m = 1 \tag{3}$$

уравнение (2) имеет вид $x_i = x_{i-1} + \Delta x_{i-1} + \cdots + \Delta^{m-1} x_{i-1}$. Сравнивая его с тождеством $x_i = x_{i-1} + \Delta x_{i-1} + \cdots + \Delta^{m-1} x_i$, получаем

$\Delta^{m-1} x_{i-1} = \Delta^{m-1} x_i$, т. е. разность порядка $(m-1)$ постоянная. Постоянную разность порядка $(m-1)$ имеет, в частности, функция $x(t)$ с постоянной производной порядка $(m-1)$

$$x^{(m-1)}(t) = \text{const}.$$

Интегрируя это равенство $(m-1)$ раз, получим $x(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_m t^{m-1}$. Таким образом, при ограничениях (3) модель сигнала является полиномиальной.

Необходимым условием стационарности сигнала является постоянство дисперсий последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, т. е. $\sigma^2_{x_1} = \sigma^2_{x_2} = \cdots = \sigma^2_{x_n}$. В дальнейшем это условие не используется, т. е. модель может быть нестационарной и дисперсия последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ может меняться.

Регрессионная модель (1) практически удобна для описания статистических свойств случайных процессов, с ограниченной производной порядка m. Так, например, для многих механических систем вторые производные от координат, рассматриваемые как функции времени, ограничены.

Статистические свойства ошибки измерения обычно задаются корреляционной функцией $K(\tau)$. Переходя к дискретному аргументу $\tau_n = \Delta t n$, где n принимает целые значения $0, 1, 2, \ldots$, функцию $K(n)$ можно получить как решение однородного дифференциального уравнения в конечных разностях $a_0 K(0) + a_1 K(1) + \cdots + a_m K(m) = 0$, которому соответствует регрессия порядка m.

Так, например, случайный процесс $x(t)$ с корреляционной функцией $K(\tau) = \sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}$ имеет регрессию первого порядка $x_i = \alpha_i x_{i-1} + \xi_i$, где $\alpha_i = e^{-\lambda \Delta t_i}$; ξ_i — случайная величина, моменты которой: $M[\xi_i] = 0$; $M[\xi_i^2] = (1-\alpha_i^2)\sigma^2$. Величина Δt_i есть шаг квантования по времени. При переменном шаге квантования, или при переменном $\lambda(t)$, параметр α_i зависит от индекса i.

Рассмотрим задачу оценивания текущего значения функции и ее первых двух разностей. Даны результаты измерений функции $x(t)$ в точках $t_1, \ldots, t_n$, т. е. выборка $y_1, \ldots, y_n$. Множество значений вектора выборки обозначим через Y. Найдем функции f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}, отображающие множество Y на множество значений оценок случайных величин $x_n, \Delta x_n, \Delta^2 x_n$: $\hat{x}_n = f_1(y_1, \ldots, y_n)$, $\Delta \hat{x}_n = f_{2n}(y_1, \ldots, y_n)$, $\Delta^2 \hat{x}_n = f_{3n}(y_1, \ldots, y_n)$ и минимизирующие критерии качества:

$$\min_{(f_1 \in F)} M_{YX_n} [f_{1n}(y_1, \ldots, y_n) - x_n]^2 = q_{1n}; \tag{4'}$$

$$\min_{(f_2 \in F)} M_{Y\Delta X_n} [f_{2n}(y_1, \ldots, y_n) - \Delta x_n]^2 = q_{2n}; \tag{4''}$$

$$\min_{(f_3 \in F)} M_{Y\Delta^2 X_n} [f_{3n}(y_1, \ldots, y_n) - \Delta^2 x_n]^2 = q_{3n}. \tag{4'''}$$

Нижний индекс при символе операции математического ожидания обозначает множество, по которому берется математическое ожидание.

В качестве дополнительных условий задачи определим модель сигнала линейной регрессией третьего порядка

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1} + \xi_n, \tag{5}$$

модель ошибки — регрессией

$$\eta_n = \alpha_n \eta_{n-1} + \zeta_n. \tag{6}$$

Класс F — класс линейных функций, т. е. функции f_{1n}, f_{2n}, f_{3n} имеют вид:

$$f_{1n}(y) = (b_{1/n}, y);\ f_{2n}(y) = (b_{2/n}, y);\ f_{3n}(y) = (b_{3/n}, y),$$

где $b_{1/n}$, $b_{2/n}$, $b_{3/n}$ — n-мерные векторы.

Таким образом, задача нахождения функций f_{1n}, f_{2n}, f_{3n} сводится к нахождению векторов $b_{1/n}$, $b_{2/n}$, $b_{3/n}$, удовлетворяющих условиям (4′), (4″), (4‴).

Решение будем искать в рекуррентной форме, удобной для реализации на ЦВМ. На первом шаге рекуррентной процедуры, которая реализуется после получения выборки y_1, y_2, y_3, примем

$$f_{13}(y_1, y_2, y_3) = y_3;\quad f_{23}(y_1, y_2, y_3) = y_3 - y_2;\quad f_{33}(y_1, y_2, y_3) = y_1 - 2y_2 + y_3,$$

т. е. векторы

$$b_{1/3} = (0, 0, 1);\ b_{2/3} = (0, -1, 1);\ b_{3/3} = (1, -2, 1).$$

Введем в рассмотрение корреляционную матрицу оценок P_n, общий элемент которой $\{P_n\}_{sk} = K_{sk,\,n}$ равен

$$K_{sk,\,n} = M_{YX_n}\left[(\Delta^{s-1}\hat{x}_n - \Delta^{s-1}x_n)(\Delta^{k-1}\hat{x}_n - \Delta^{k-1}x_n)\right];\ s, k = 1, 2, 3.$$

При заданной модели ошибки корреляционная матрица P_3 на первом шаге рекуррентной процедуры определена. Перейдем к $(n-2)$-му шагу рекуррентной процедуры, полагая, что на $(n-3)$-м шаге функции $f_{1,\,n-1}$, $f_{2,\,n-1}$, $f_{3,\,n-1}$, минимизирующие критерии качества $q_{1,\,n-1}$, $q_{2,\,n-1}$, $q_{3,\,n-1}$, определены и определена корреляционная матрица P_{n-1}. Найдем функции f_{1n}, f_{2n}, f_{3n} и матрицу P_n.

Запишем функцию f_{1n} в виде $f_{1n}(y_1, \ldots, y_n) = (b_{1/n}^-, y^-) + b_{1n}y_n$, где $b_{1/n}^- = (b_{11/n}, \ldots, b_{1,\,n-1/n})$; $y^- = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Вектор $b_{1/n}$ определяет функцию f_{1n}, поэтому условие (4′) можно представить следующим образом:

$$\min_{(b_{1/n} \in R_n)} M_{Y,\,X_n}\left[(b_{1/n}^-, y^-) + b_{1n}y_n - x_n\right]^2 = q_{1n}. \qquad (7)$$

Так как

$$M_{YX}[\varphi(y, x_n)] = M_{YX_n} M_{X^-/YX_n}[\varphi(y, x_n)] = M_{YX_n}[\varphi(y, x_n)],$$

где $x^- = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in X^-$, то условие (7) можно записать

$$\min_{b_{1/n} \in R_n} M_{YX}\left[(b_{1/n}^-, y^-) + b_{1n}y_n - x_n\right]^2 = q_{1n}.$$

Сделаем подстановку $y_n = x_n + \eta_n$ и вместо x_n, η_n используем правые части регрессий (5), (6):

$$\min_{(b_{1/n} \in R_n)} M_{YX}\left[(b_{1/n}^-, y^-) - (1 - b_{1n})(x_{n-1} + \Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1}) + {}\right.$$
$$\left. + b_{1n}\alpha_n\eta_{n-1} - (1 - b_{1n})\xi_n - b_{1n}\zeta_n\right]^2 = q_{1n}.$$

Операцию математического ожидания M_{YX} можно выполнить последовательно:

$$M_{YX} = M_{Y^-X^-} M_{X_n/Y^-X^-} M_{Y_n/Y^-X}.$$

Выполняя две последние операции математического ожидания и учитывая, что ξ_n и ζ_n зависят соответственно только от x_n и y_n и их математические ожидания равны нулю, получим

$$\min_{(b_{1/n} \in R_n)} M_{Y^- X^-} [(b_{\overline{1/n}}, y^-) - (1 - b_{1n}) \times$$
$$\times (x_{n-1} + \Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1}) + b_{1n} \alpha_n \eta_{n-1}]^2 +$$
$$+ (1 - b_{1n})^2 \sigma_{\xi_n}^2 + b_{1n}^2 \sigma_{\zeta_n}^2 = q_{1n},$$

или после подстановки $\eta_{n-1} = y_{n-1} - x_{n-1}$

$$\min_{(b_{1/n} \in R_n)} M_{Y^- X^-} [(b_{\overline{1/n}}, y^-) + b_{1n} \alpha_n y_{n-1} - (1 - b_{1n} + \alpha_n b_{1n}) x_{n-1} -$$
$$- (1 - b_{1n}) (\Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1})]^2 + (1 - b_{1n})^2 \sigma_{\xi_n}^2 + b_{1n}^2 \sigma_{\zeta_n}^2 = q_{1n}. \quad (8)$$

Значение вектора $b_{1/n}$, удовлетворяющее условию минимума, найдем в два приема: сначала найдем вектор $b_{\overline{1/n}}$, затем коэффициент b_{1n}. Обозначим

$$\Psi (b_{1/n}) = M_{Y^- X^-} [(b_{\overline{1/n}} + e, y^-) - a_1 x_{n-1} -$$
$$- a_2 (\Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1})]^2 + (1 - b_{1n})^2 \sigma_{\xi_n}^2 + b_{1n}^2 \sigma_{\zeta_n}^2,$$

где $e = (0, \ldots, 0, b_{1n} \alpha_n)$ — вектор размерности $(n - 1)$; $a_1 = (1 - b_{1n} + b_{1n} \alpha_n)$; $a_2 = (1 - b_{1n})$.

Вектор $b_{\overline{1/n}}$, удовлетворяющий условию минимума, должен удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial \Psi (b_{1/n})}{\partial b_{1\, i/n}} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n - 1),$$

или

$$M_{Y^- X^-} [(b_{\overline{1/n}} + e, y^-) - a_1 x_{n-1} - a_2 (\Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1})] y_i = 0. \quad (9)$$

Примем $y_1 = 1$. Тогда $M_{Y^- X^-} [(b_{\overline{1/n}} + e, y^-) - a_1 x_{n-1} - a_2 (\Delta x_{n-1} + \Delta^2 x_{n-1})] = 0$. Центрируя случайные величины и выполняя операцию математического ожидания в системе уравнений (9), получим, переходя к матричной форме записи,

$$K_{y^-} (b_{\overline{1/n}} + e) - \sigma_1 a_1 - (\sigma_2 + \sigma_3) a_2 = 0, \quad (10)$$

где K_{y^-} — матрица ковариаций вектора y^-; $\sigma_1 = \mathrm{cov}\, [x_{n-1}, y^-]$; $\sigma_2 = \mathrm{cov}\, [\Delta x_{n-1}, y^-]$; $\sigma_3 = \mathrm{cov}\, [\Delta^2 x_{n-1}, y^-]$. Разрешая уравнение (10) относительно вектора $b_{\overline{1/n}} + e$, получим

$$b_{\overline{1/n}} + e = K_{y^-}^{-1} [\sigma_1 a_1 + (\sigma_2 + \sigma_3) a_2]. \quad (11)$$

По условию задачи векторы $b_{1/n-1}$, $b_{2/n-1}$, $b_{3/n-1}$, удовлетворяющие условиям:

$$\min_{(b_{1/n-1} \in R_{n-1})} M_{Y^- X^-} [(b_{1/n-1}, y^-) - x_{n-1}]^2 = q_{1,\, n-1}; \quad (12')$$

$$\min_{(b_{2/n-1} \in R_{n-1})} M_{Y^- X^-} [(b_{2/n-1}, y^-) - \Delta x_{n-1}]^2 = q_{2,\, n-1}; \quad (12'')$$

$$\min_{(b_{3/n-1} \in R_{n-1})} M_{Y^- X^-} [(b_{3/n-1}, y^-) - \Delta^2 x_{n-1}]^2 = q_{3,\, n-1}, \quad (12''')$$

определены. Аналогично предыдущему находим:

$$b_{1/n-1} = K_{y^-}^{-1}\,\sigma_1;\ b_{2/n-1} = K_{y^-}^{-1}\,\sigma_2;\ b_{3/n-1} = K_{y^-}^{-1}\,\sigma_3.$$

Умножая первое равенство на коэффициент a_1, второе и третье на a_2 и складывая их, получим

$$b_{1/n-1}\,a_1 + (b_{2/n-1} + b_{3/n-1})\,a_2 = K_{y^-}^{-1}\,[\sigma_1 a_1 + (\sigma_2 + \sigma_3)\,a_2]. \qquad (13)$$

Из равенства правых частей (11) и (13) следует

$$b_{1/n}^{-} = b_{1/n-1}\,a_1 + (b_{2/n-1} + b_{3/n-1})\,a_2 - e. \qquad (14)$$

Подставим в (8) вместо вектора $b_{1/n}^{-}$ найденное выражение (14):

$$\min_{(b_{1n}\in R_1)} M_{y^-x^-}[(1 - b_{1n} + \alpha_n b_{1n})\,((b_{1/n-1}, y^-) - x_{n-1}) +$$
$$+ (1 - b_{1n})\,[(b_{2/n-1}, y^-) - \Delta x_{n-1}] + (1 - b_{1n}) \times$$
$$\times [(b_{3/n-1}, y^-) - \Delta^2 x_{n-1}]]^2 + (1 - b_{1n})^2\,\sigma_{\xi_n}^2 + b_{1n}^2\,\sigma_{\zeta_n}^2 = q_{1n},$$

или после выполнения операции математического ожидания с учетом (12′), (12″), (12‴) и обозначений элементов матрицы P_{n-1}:

$$\min_{(b_{1n}\in R_1)} [(1 - b_{1n} + \alpha_n b_{1n})^2\,q_{1,\,n-1} + (1 - b_{1n})^2\,q_{2,\,n-1} +$$
$$+ (1 - b_{1n})^2\,q_{3,\,n-1} + 2\,(1 - b_{1n})\,(1 - b_{1n} + \alpha_n b_{1n})\,K_{12,\,n-1} +$$
$$+ 2\,(1 - b_{1n})\,(1 - b_{1n} + \alpha_n b_{1n})\,K_{13,\,n-1} + 2\,(1 - b_{1n})^2\,K_{23,\,n-1} +$$
$$+ (1 - b_{1n})^2\,\sigma_{\xi_n}^2 + b_{1n}^2\,\sigma_{\zeta_n}^2] = q_{1n}.$$

Дифференцируя левую часть по b_{1n} и приравнивая производную нулю, находим значение b_{1n}, удовлетворяющее условию минимума:

$$b_{1n} = \frac{(1-\alpha_n)\,q_{1,\,n-1} + q_{2,\,n-1} + q_{3,\,n-1} + (2-\alpha_n)\,K_{12,\,n-1} + }{(1-\alpha_n)^2\,q_{1,\,n-1} + q_{2,\,n-1} + q_{3,\,n-1} + 2\,(1-\alpha_n)\,K_{12,\,n-1} + } \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{+ (2-\alpha_n)\,K_{13,\,n-1} + 2\,K_{23,\,n-1} + \sigma_{\xi_n}^2}{+ 2\,(1-\alpha_n)\,K_{13,\,n-1} + 2\,K_{23,\,n-1} + \sigma_{\xi_n}^2 + \sigma_{\zeta_n}^2}.$$

При этом критерий качества оценки $\hat{x}_n$ равен

$$q_{1n} = \alpha_n\,(1 - b_{1n})\,(q_{1,\,n-1} + K_{12,\,n-1} + K_{13,\,n-1}) + b_{1n}\,(\alpha_n^2\,q_{1,\,n-1} + \sigma_{\zeta_n}^2).$$

Аналогично из условия минимума критериев качества оценок $\Delta\hat{x}_n$ и $\Delta^2\hat{x}_n$ находим функции f_{2n}, f_{3n} и коэффициенты b_{2n}, b_{3n}.

Ниже приводится общий вид алгоритма:

$$\hat{x}_n = (1 - b_{1n})\,\hat{x}_{n-1} + b_{1n}\,y_n + \alpha_n b_{1n}\,(y_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) +$$
$$+ (1 - b_{1n})\,(\Delta\hat{x}_{n-1} + \Delta^2\hat{x}_{n-1});$$
$$\Delta\hat{x}_n = (1 - b_{2n})\,\Delta\hat{x}_{n-1} + b_{2n}\,\Delta y_n + b_{2n}\,(1 - \alpha_n) \times$$
$$\times (y_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) + (1 - b_{2n})\,\Delta^2\hat{x}_{n-1};$$
$$\Delta^2\hat{x}_n = (1 - b_{3n})\,\Delta^2\hat{x}_{n-1} + b_{3n}\,\Delta^2 y_n + b_{3n}\,(1 - \alpha_n) \times$$

$$\times (y_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) + b_{3n}(\Delta y_{n-1} - \Delta \hat{x}_{n-1});$$

$$b_{1n} = \frac{(1-\alpha_n) q_{1,n-1} + q_{2,n-1} + q_{3,n-1} + (2-\alpha_n) K_{12,n-1} +}{(1-\alpha_n)^2 q_{1,n-1} + q_{2,n-1} + q_{3,n-1} + 2(1-\alpha_n) K_{12,n-1} +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ (2-\alpha_n) K_{13,n-1} + 2K_{23,n-1} + \sigma^2_{\xi_n}}{+ 2(1-\alpha_n) K_{13,n-1} + 2K_{23,n-1} + \sigma^2_{\xi_n} + \sigma^2_{\zeta_n}};$$

$$b_{2n} = \frac{q_{3,n-1} + q_{2,n-1} + 2K_{23,n-1} + (1-\alpha_n) K_{13,n-1} +}{q_{3,n-1} + q_{2,n-1} + (1-\alpha_n)^2 q_{1,n-1} + 2K_{23,n-1} +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ (1-\alpha_n) K_{12,n-1} + \sigma^2_{\xi_n}}{+ 2(1-\alpha_n)(K_{13,n-1} + K_{12,n-1}) + \sigma^2_{\xi_n} + \sigma^2_{\zeta_n}};$$

$$b_{3n} = \frac{q_{3,n-1} + K_{23,n-1} +}{q_{3,n-1} + q_{2,n-1} + (1-\alpha_n)^2 q_{1,n-1} + 2K_{23,n-1} +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ (1-\alpha_n) K_{13,n-1} + \sigma^2_{\xi_n}}{+ 2(1-\alpha_n)(K_{13,n-1} + K_{12,n-1}) + \sigma^2_{\xi_n} + \sigma^2_{\zeta_n}};$$

$$q_{1n} = \alpha_n (1 - b_{1n})(q_{1,n-1} + K_{12,n-1} + K_{13,n-1}) + b_{1n}(\alpha_n^2 q_{1,n-1} + \sigma^2_{\zeta_n});$$

$$q_{2n} = b_{2n}[(1-\alpha_n)^2 q_{1,n-1} + \sigma^2_{\zeta_n}] - (1-\alpha_n)(1-b_{2n})(K_{13,n-1} + K_{12,n-1});$$

$$q_{3n} = b_{3n}[q_{2,n-1} + (1-\alpha_n)^2 q_{1,n-1} + 2(1-\alpha_n) K_{12,n-1} + \sigma^2_{\zeta_n}] -$$
$$- (1-b_{3n})[K_{23,n-1} + (1-\alpha_n) K_{13,n-1}];$$

$$K_{12,n} = - b_{2n}(1-\alpha_n)(1 - b_{1n} + \alpha_n b_{1n}) q_{1,n-1} + (1-b_{1n}) \times$$
$$\times (1-b_{2n})(q_{2,n-1} + q_{3,n-1}) + [(1 - b_{1n} + \alpha_n b_{1n})(1-b_{2n}) -$$
$$- b_{2n}(1-\alpha_n)(1-b_{1n})] K_{12,n-1} + [(1-b_{2n})(1 - b_{1n} + \alpha_n b_{1n}) -$$
$$- b_{2n}(1-\alpha_n)(1-b_{1n})] K_{13,n-1} + 2(1-b_{1n})(1-b_{2n}) K_{23,n-1} +$$
$$+ (1-b_{1n})(1-b_{2n}) \sigma^2_{\xi_n} + b_{1n} b_{2n} \sigma^2_{\zeta_n};$$

$$K_{13,n} = - b_{3n}(1-\alpha_n)(1 - b_{1n} + \alpha_n b_{1n}) q_{1,n-1} - b_{3n}(1-b_{1n}) \times$$
$$\times q_{2,n-1} + (1-b_{1n})(1-b_{3n}) q_{3,n-1} - b_{3n}[(2-\alpha_n)(1-b_{1n}) +$$
$$+ \alpha_n b_{1n}] K_{12,n-1} + [(1-b_{3n})(1 - b_{1n} + \alpha_n b_{1n}) -$$
$$- b_{3n}(1-\alpha_n)(1-b_{1n})] K_{13,n-1} + (1-b_{1n})(1 - 2b_{3n}) K_{23,n-1} +$$
$$+ (1-b_{1n})(1-b_{3n}) \sigma^2_{\xi_n} + b_{1n} b_{3n} \sigma^2_{\zeta_n};$$

$$K_{23,n} = b_{2n} b_{3n} (1-\alpha_n)^2 q_{1,n-1} - b_{3n}(1-b_{2n}) q_{2,n-1} +$$
$$+ (1-b_{2n})(1-b_{3n}) q_{3,n-1} - b_{3n}(1-\alpha_n)(1 - 2b_{2n}) K_{12,n-1} -$$
$$- (1-\alpha_n)[b_{2n}(1-b_{3n}) + b_{3n}(1-b_{2n})] K_{13,n-1} + (1-b_{2n}) \times$$
$$\times (1 - 2b_{3n}) K_{23,n-1} + (1-b_{2n})(1-b_{3n}) \sigma^2_{\xi_n} + b_{2n} b_{3n} \sigma^2_{\zeta_n}.$$

Вычисления производятся по схеме

$$(b_{1n},\ b_{2n},\ b_{3n}) \to (\hat{x}_n,\ \Delta\hat{x}_n,\ \Delta^2\hat{x}_n) \to (q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}, K_{12,n}, K_{13,n}, K_{23\,n}).$$

Рекуррентная форма алгоритма удобна для реализации его на ЦВМ. Время выполнения одного цикла вычислений на машине типа М-220 составляет около 10 мс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
2. С. З. Кузьмин. Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Советское радио», 1967.

Поступила в редакцию
13 октября 1970 г.