АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1971

УДК 621.374.088+519.2

В. Н. БОЙКОВ, Ю. М. КРЕНДЕЛЬ, В. И. РАБИНОВИЧ,
О. Е. ТРОФИМОВ, Е. А. ФИГУРОВСКИЙ
*(НОВОСИБИРСК)*

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧНОСТИ ЦИФРОВЫХ ПРИБОРОВ

При проектировании цифровых измерительных приборов одним из первых встает вопрос о необходимом числе разрядов. Увеличение числа разрядов является очевидным способом повышения точности. Вместе с тем такое решение ведет к усложнению прибора, а в ряде случаев создает определенные трудности в процессе отладки. Кроме того, следует учитывать, что наличие помех, имеющих место в реальном приборе, может существенно уменьшить ожидаемый выигрыш в точности.

Ниже предлагается методика, позволяющая оценить реальный эффект, получаемый от введения дополнительного разряда при наличии шумов в устройстве сравнения. Изложение проводится применительно к цифровому прибору поразрядного уравновешивания с кодом 2—4—2—1. Выбор этого кода обусловлен тем, что он является одним из предпочтительных (по помехоустойчивости) в классе двоично-десятичных кодов [1].

Влияние помех приводит к тому, что устройство сравнения реагирует не на разность между значениями измеряемой и компенсационной величин $(x-u)$, а на смесь этой разности со значением помехи, воздействующей на устройство сравнения в процессе формирования его выходного сигнала. Будем полагать, что $\xi(t)$ — аддитивное [по отношению к величине $(x-u)$] и независимое от этой величины мешающее воздействие. В принятых обозначениях запишем два события:

$$x-u>0 \quad \text{и} \quad x-u+\xi(t)<0; \quad x-u<0 \quad \text{и} \quad x-u+\xi(t)>0,$$

которые будем называть «сбоями» в работе устройства сравнения. Случайный процесс $\xi(t)$ не является произвольным, в практических ситуациях он подчиняется ряду довольно жестких ограничений. В частности, ниже принимается гипотеза о стационарности этого процесса и ограниченности его по амплитудным значениям. Значения процесса $\xi(t)$ (исходя из принципа «равных влияний» [2]) полагаются не превышающими цены одного деления шкалы прибора.

Пусть измеряемая величина $x$ распределена равномерно на отрезке $[0, 10^n]$ и $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс, удовлетворяющий условиям: $|\xi(t)|\leqslant 1$; $\xi(t)$ и $\xi(t+\tau)$ независимы ($\tau$ — длительность одного такта уравновешивания) и $F(y)=1-F(-y)$, где $F(y)$ — функция распределения $\xi(t^*)$. Будем называть $l$-м циклом ($l=1,2,\ldots,n$) период времени, необходимый для получения результата уравновешивания в

$l$-м десятичном разряде (он включает в себя время четырех тактов уравновешивания).

Учитывая ограничения на $\xi(t)$, нетрудно видеть, что сбои устройства сравнения на $k$-м цикле ($k=1,2,\ \ldots,\ n-1$) возможны только для значений $x$, имеющих в десятичной записи следующий вид:

$$x_1 x_2 \ldots x_k 0 \ldots 0 + \{x\};\ x_k = 1, 2, \ldots, 9;\ k = 1, 2, \ldots, n-1; \quad (1)$$

$$x_1 x_2 \ldots x_k 9 \ldots 9 + \{x\};\ x_k = 0, 1, \ldots, 8;\ k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad (2)$$

где $\{x\} = 0 \ldots 0\, x_{n+1} \ldots$ . Для $x$ вида (1) сбои устройства сравнения могут приводить к результату измерения, не большему значения $x$, а для $x$ вида (2) — к результату измерения, не меньшему значения $x$. На $n$-м цикле сбои устройства сравнения возможны для всех значений $x$, т. е. для $x$, имеющих вид

$$x_1 x_2 \ldots x_n + \{x\};\ x_k = 0, 1, \ldots, 9;\ k = 1, 2, \ldots, n. \quad (3)$$

Очевидно, что сбои устройства сравнения в течение измерения конкретного значения $x$ возможны или только на $k$-м ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$), или только на $n$-м цикле.

При заданном ограничении на величину шума $\xi(t)$ окончательный результат измерения $z(n)$ может оказаться правильным (результат измерения лежит в том же кванте, что и измеряемая величина $x$), в левом кванте (на квант левее правильного результата) и в правом кванте (на квант правее правильного результата).

Рассмотрим события, приводящие к попаданию результата измерения $z(n)$ в тот или иной из указанных квантов для различных $x$.

1. Значения $x$ вида (1). Пусть $x_k=1$ ($x=x_1 x_2 \ldots x_{k-1} 10 \ldots 0 + \{x\}$); тогда $z(n)$ окажется правильным, если имеет место событие

$$x - u_k^4 + \xi_k(t_4) > 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0, \quad (4)$$

где $u_l^r$ и $\xi_l(t_r)$ — значения компенсационной величины и шума на $l$-м цикле ($l=1,2,\ \ldots,\ n$) $r$-го такта уравновешивания ($r=1,\ \ldots,\ 4$) соответственно. $z(n)$ окажется в левом кванте, если

$$x - u_k^4 + \xi_k(t_4) < 0, \quad (5)$$

и в правом кванте, если

$$x - u_k^4 + \xi_k(t_4) >;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0. \quad (6)$$

Пусть $x_k = 2$ ($x = x_1 x_2 \ldots x_{k-1} 20 \ldots 0 + \{x\}$); тогда $z(n)$ окажется правильным, если

$$x - u_k^1 + \xi_k(t_1) > 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_n) < 0 \quad (7)$$

или если

$$x - u_k^1 + \xi_k(t_1) < 0;\ x - u_k^3 + \xi_k(t_3) > 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0; \quad (8)$$

в левом кванте, если

$$x - u_k^1 + \xi_k(t_1) < 0;\ x - u_k^3 + \xi_k(t_3) < 0, \quad (9)$$

и в правом кванте, если

$$x - u_k^1 + \xi_k(t_1) > 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0 \quad (10)$$

или если

$$x - u_k^1 + \xi_k(t_1) < 0;\ x - u_k^3 + \xi_k(t_3) > 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0. \quad (11)$$

Для $x_k = 3, 4, \ldots, 9$ условия получения результата измерения $z(n)$ в указанных квантах аналогичны условиям при $x_k = 1$ с очевидными изменениями индексов при $u$ и $\xi(t)$.

2. Значения $x$ вида (2). Пусть $x_k = 0$ $(x = x_1 x_2 \ldots x_{k-1} 09 \ldots 9 + \{x\})$; тогда $z(n)$ окажется правильным, если

$$x - u_k^4 + \xi_k(t_4) < 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0; \tag{12}$$

в левом кванте, если

$$x - u_k^4 + \xi_k(t_4) < 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0; \tag{13}$$

в правом кванте, если

$$x - u_k^4 + \xi_k(t_4) > 0. \tag{14}$$

Пусть $x_k = 1$ $(x = x_1 x_2 \ldots x_{1-k} 19 \ldots 9 + \{x\})$; тогда $z(n)$ окажется правильным, если

$$x - u_k^1 + \xi_k(t_1) < 0;\ x - u_k^3 + \xi_k(t_3) < 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0; \tag{15}$$

в левом кванте, если

$$x - u_k^1 + \xi_k(t_1) < 0;\ x - u_k^3 + \xi_k(t_3) < 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0; \tag{16}$$

в правом кванте, если

$$x - u_k^1 + \xi_k(t_1) < 0 \tag{17}$$

или если

$$x - u_k^1 + \xi_k(t_1) < 0;\ x - u_k^3 + \xi_k(t_3) > 0. \tag{18}$$

Для $x_k = 2, 3, \ldots, 8$ условия получения результата измерения $z(n)$ в том или ином кванте аналогичны условиям при $x_k = 0$ с очевидными изменениями в индексации $u$ и $\xi(t)$.

3. Значения $x$ вида (3). Здесь исследования проводим только для $x_n = 1, 2, \ldots, 8$ (случаи, когда $x_n = 0$ и $x_n = 9$ были исследованы при рассмотрении $x$ вида (1) и (2) соответственно, кроме крайних случаев, когда $x = 0 \ldots 0 + \{x\}$ и $x = 9 \ldots 9 + \{x\}$, которые будут исследованы ниже).

Пусть $x_n = 1$ $(x = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} 1 + \{x\}$; тогда $z(n)$ окажется правильным, если

$$x - u_n^1 + \xi_n(t_1) < 0;\ x - u_n^3 + \xi_n(t_3) < 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0; \tag{19}$$

в левом кванте, если

$$x - u_n^1 + \xi_n(t_1) < 0;\ x - u_n^3 + \xi_n(t_3) < 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0; \tag{20}$$

в правом кванте, если

$$x - u_n^1 + \xi_n(t_1) < 0;\ x - u_n^3 + \xi_n(t_3) > 0 \tag{21}$$

или если

$$x - u_n^1 + \xi_n(t_1) > 0. \tag{22}$$

Пусть $x_n = 2$ $(x = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} 2 + \{x\})$; тогда $z(n)$ окажется правильным, если

$$x - u_n^1 + \xi_n(t_1) > 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0 \tag{23}$$

или если

$$x - u_n^1 + \xi_n(t_1) < 0;\ x - u_n^3 + \xi_n(t_3) > 0;\ x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0; \tag{24}$$

в левом кванте, если

$$x - u_n^1 + \xi_n(t_1) < 0;\; x - u_n^3 + \xi_n(t_3) < 0; \tag{25}$$

в правом кванте, если

$$x - u_n^1 + \xi_n(t_1) < 0;\; x - u_n^3 + \xi_n(t_3) > 0;$$
$$x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0 \tag{26}$$

или если

$$x - u_n^1 + \xi_n(t_1) > 0;\; x - u_n^4 + \xi_n(t_n) > 0. \tag{27}$$

Пусть $x_n = 3\ (x = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} 3 + \{x\})$; тогда $z(n)$ окажется правильным, если

$$x - u_n^3 + \xi_n(t_3) < 0;\; x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0; \tag{28}$$

в левом кванте, если

$$x - u_n^3 + \xi_n(t_3) < 0;\; x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0; \tag{29}$$

в правом кванте, если

$$x - u_n^3 + \xi_n(t_3) > 0. \tag{30}$$

Пусть $x_n = 4\ (x = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} 4 + \{x\}$; тогда $z(n)$ окажется правильным, если

$$x - u_n^3 + \xi_n(t_3) > 0;\; x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0; \tag{31}$$

в левом кванте, если

$$x - u_n^3 + \xi_n(t_3) < 0; \tag{32}$$

в правом кванте, если

$$x - u_n^3 + \xi_n(t_3) > 0;\; x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0. \tag{33}$$

Для $x_n = 5{,}7$, $x_n = 6{,}8$ условия получения результата измерения $z(n)$ в том или ином кванте аналогичны условиям при $x_n = 3$ и $x_n = 4$ соответственно с очевидными изменениями индексов при $u$ и $\xi(t)$.

Рассмотрим, наконец, крайние значения $x$. Пусть $x = 0 \ldots 0 + \{x\}$. $z(n)$ — правильное, если

$$x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0, \tag{34}$$

и в правом кванте, если

$$x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0. \tag{35}$$

Пусть $x = 9 \ldots 9 + \{x\}$; тогда $z(n)$ — правильное, если

$$x - u_n^4 + \xi_n(t_4) > 0, \tag{36}$$

и в левом кванте, если

$$x - u_n^4 + \xi_n(t_4) < 0. \tag{37}$$

Вероятности $P_0^n(\{x\})$, $P_{-1}^n(\{x\})$ и $P_{+1}^{n\,'}(\{x\})$ (индекс $n$ указывает на наличие $n$ разрядов) оказаться результату измерения $z(n)$ правильным, в левом и правом квантах соответственно равны:

$$P_0^n(\{x\}) = 8\,P_1 P(4) + P_1[P(7) + P(8)] + 8\,P_1 P(12) + P_1 P(15) +$$

$$+P_2P(19)+P_2[P(23)+P(24)]+3P_2P(28)+3P_2P(31)+ \\ +P_3[P(34)+P(36)]; \qquad (38)$$

$$P_{-1}^n(\{x\})=8P_1P(5)+P_1P(9)+8P_1P(13)+P_1P(16)+ \\ +P_2P(20)+P_2P(25)+3P_2P(29)+3P_2P(32)+P_3P(37); \qquad (39)$$

$$P_{+1}^n(\{x\})=8P_1P(6)+P_1[P(10)+P(11)]+8P_1P(14)+ \\ +P_1[P(17)+P(18)]+P_2[P(21)+P(22)]+P_2[P(26)+P(27)]+ \\ +3P_2P(30)+3P_2P(33)+P_3P(35). \qquad (40)$$

Здесь $P_1$ — вероятность появления каждого $x$ вида (1) и (2), $P_1=\frac{10^{n-1}-1}{9\cdot 10^n}$; $P_2$— вероятность появления каждого $x$ вида (3), $P_2=10^{-1}$; $P_3$— вероятность появления каждого из крайних значений $x, P_3=10^{-n}$; $P(m)$ — вероятность выполнения события, указанного в формуле $(m)$.

Подставляя в (38) — (40) значения $P_1$, $P_2$, $P_3$ и $P(m)$, а также осредняя полученные выражения по $\{x\}$, будем иметь:

$$P_0^n=\frac{10^n-2}{10^n}\int_0^1 F(y)\,F(1-y)\,dy+\frac{2}{10^n}\int_0^1 F(y)\,dy; \qquad (41)$$

$$P_{-1}^n=\frac{1}{2}-\frac{2\cdot 10^n+7}{9\cdot 10^n}\int_0^1 F(y)\,dy-\frac{35\cdot 10^{n-1}-8}{9\cdot 10^n}\times \\ \times\int_0^1 F(y)\,F(1-y)\,dy+\frac{2\cdot 10^n-2}{9\cdot 10^n}\int_0^1 [F(y)]^2\,dy- \\ -\frac{10^n-1}{9\cdot 10^n}\int_0^1 F(y)\,[F(1-y)]^2\,dy; \qquad (42)$$

$$P_{+1}^n=\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 10^n-11}{9\cdot 10^n}\int_0^1 F(y)\,dy-\frac{2\cdot 10^n-2}{9\cdot 10^n}\int_0^1 [F(y)]^2\,dy- \\ -\frac{55\cdot 10^{n-1}-10}{9\cdot 10^n}\int_0^1 F(y)\,F(1-y)\,dy+\frac{10^n-1}{9\cdot 10^n}\int_0^1 F(y)\,[F(1-y)]^2\,dy. \qquad (43)$$

Легко видеть, что

$$P_0^n+P_{-1}^n+P_{+1}^n=1.$$

Из (42) и (43) следует, что для любого распределения $F(y)$ $P_{+1}^n>P_{-1}^n$.

О соотношении между величинами $P_0^n$ и $P_{+1}^n$, а также $P_0^n$ и $P_{-1}^n$ можно говорить лишь применительно к конкретным законам распределения $F(y)$.

Пусть некоторая величина $\gamma$ равна 0, если результат измерения $z(n)$ окажется правильным; $+1$, если $z(n)$ в правом кванте, и $-1$, если $z(n)$ в левом кванте. Тогда для $(n+1)$-го цикла и $r$-го ($r=1$, 2, 3, 4) такта уравновешивания можно составить сумму

$$0,\lambda-\gamma-0,j_r+\{x\}', \qquad (44)$$

в которой $0, \lambda = \{x\} - \{x\}'$; $\{x\}' = 0 \ldots 0 x_{n+2} \ldots$ (иначе $\lambda = x_{n+1}$); $j_r$ — приращение компенсационной величины на $r$-м такте уравновешивания ($j_1 = 2$; $j_2 = 4, 6$; $j_3 = 2, 4, 6, 8$; $j_4 = 1, 3, 5, 7, 9$).

Результат уравновешивания на $r$-м такте зависит от соотношения между суммой (44) и значением шума $\xi_{n+1}(t_r)$. Могут иметь место два взаимоисключающих события:

$$\xi_{n+1}(t_r) \leqslant 0, \lambda - \gamma - 0, j_r + \{x\}';$$

$$\xi_{n+1}(t_r) > 0, \lambda - \gamma - 0, j_r + \{x\}'.$$

Первому из них соответствует вероятность $Q_{\gamma, \xi} = P(\xi(t) \leqslant -\gamma + 0, \xi + \{x\}')$, где

$$\xi = 0, \lambda - 0, j_r \quad (\xi = 0, 1, 2, \ldots, 9),$$

второму — вероятность $\overline{Q}_{\gamma, \xi} = 1 - Q_{\gamma, \xi}$. От этих вероятностей можно перейти к вероятностям $q_\gamma(s/\lambda)$, получить значение $(n+1)$-го разряда, равное $s$, при условии, что $x_{n+1} = \lambda$ $(s, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, 9)$:

$$
\begin{aligned}
q_\gamma(0/\lambda) &= \overline{Q}_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-4}\overline{Q}_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-1};\\
q_\gamma(1/\lambda) &= \overline{Q}_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-4}\overline{Q}_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-1};\\
q_\gamma(2/\lambda) &= \overline{Q}_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-4}Q_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-3} + Q_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-6}\overline{Q}_{\gamma, k-4}\overline{Q}_{\gamma, k-3};\\
q_\gamma(3/\lambda) &= \overline{Q}_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-4}Q_{\gamma, k-2}Q_{\gamma, k-3} + Q_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-6}\overline{Q}_{\gamma, k-4}Q_{\gamma, k-3};\\
q_\gamma(4/\lambda) &= \overline{Q}_{\gamma, k-2}Q_{\gamma, k-4}\overline{Q}_{\gamma, k-6}\overline{Q}_{\gamma, k-5} + Q_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-6}Q_{\gamma, k-4}\overline{Q}_{\gamma, k-5};\\
q_\gamma(5/\lambda) &= \overline{Q}_{\gamma, k-2}Q_{\gamma, k-4}\overline{Q}_{\gamma, k-6}Q_{\gamma, k-5} + Q_{\gamma, k-2}\overline{Q}_{\gamma, k-6}Q_{\gamma, k-4}Q_{\gamma, k-5};\\
q_\gamma(6/\lambda) &= \overline{Q}_{\gamma, k-2}Q_{\gamma, k-4}Q_{\gamma, k-6}\overline{Q}_{\gamma, k-7} + Q_{\gamma, k-2}Q_{\gamma, k-6}\overline{Q}_{\gamma, k-8}\overline{Q}_{\gamma, k-7};\\
q(7/\lambda) &= \overline{Q}_{\gamma, k-2}Q_{\gamma, k-4}Q_{\gamma, k-6}Q_{\gamma, k-7} + Q_{\gamma, k-2}Q_{\gamma, k-6}\overline{Q}_{\gamma, k-8}Q_{\gamma, k-7};\\
q_\gamma(8/\lambda) &= Q_{\gamma, k-2}Q_{\gamma, k-6}Q_{\gamma, k-8}\overline{Q}_{\gamma, k-9};\\
q_\gamma(9/\lambda) &= Q_{\gamma, k-2}Q_{\gamma, k-6}Q_{\gamma, k-8}Q_{\gamma, k-9}.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Заметим, что при фиксированном $\gamma$ можно найти такие $\lambda$ и $s$, что $q_\gamma(s/\lambda) = 0$ (это следует из определения $Q_{\gamma, \xi}$ и ограничения на шум). Вероятность $P_0^{n+1}(\{x\}')$ оказаться результату измерения $z(n+1)$ правильным равна

$$P_0^{n+1}(\{x\}') = P_0^n \sum_{k=0}^{9} q_0(k/k)\, B_k, \tag{46}$$

где $B_k$ — вероятность того, что $x_{n+1} = k$; для принятых условий $B_k = \frac{1}{10}$. Осредняя (46) по $\{x\}'$, будем иметь

$$P_0^{n+1} = P_0^n \sum_{k=0}^{9} \int_0^{0,1} q_0(k/k)\, dy. \tag{47}$$

Вероятность $P_{-m}^{n+1}$ оказаться результату измерения $z(n+1)$ на $m$ квантов левее правильного, осредненная по $\{x\}'$, равна

$$P_{-m}^{n+1} = P_0^n \sum_{k=m}^{9} \int_0^{0,1} q_0 (k - m/k)\, dy + P_{-1}^n \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{0,1} q_{-1} (10 + k - m/k)\, dy \cdot \quad (48)$$

Вероятность $P_{+m}^{n+1}$ оказаться результату измерения $z(n+1)$ на $m$ квантов правее правильного, осредненная по $\{x\}'$, равна

$$P_{+m}^{n+1} = P_0^n \sum_{k=m}^{9-m} \int_0^{0,1} q_0 (k + m/k)\, dy + P_{+1}^n \sum_{k=10-m}^{9} \int_0^{0,1} q_{+1} (k + m - 10/k)\, dy. \quad (49)$$

Формулы (47)—(49) позволяют (при известном виде функции $F(y)$) построить гистограмму ошибочных результатов измерения и оценить «выигрыш» (в смысле принятого критерия точности) от введения дополнительного разряда.

Аналогичным образом можно определить эффект от добавления двух и более разрядов. Принцип решения задачи не изменяется при обобщении ее на случай, когда $|\xi(t)| \leqslant mh$, где $h$ — цена деления шкалы при первоначально назначенном числе разрядов, а $m=2, 3, \ldots$

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. В. Ефименко. О помехоустойчивости двоично-десятичных кодов.— Автометрия, 1965, № 2.
2. К. П. Яковлев. Математическая обработка результатов измерений. М., Гостехиздат, 1950.



*Поступила в редакцию*
*18 августа 1970 г.*