АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1971

УДК 621.391 + 519.2

Э. С. КАТАШКОВ, Ю. Л. РОЗОВ, М. Б. УЛИЦКИЙ
(Ленинград)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ СИГНАЛОВ ПО ДИСКРЕТНЫМ ДАННЫМ

1. Рассматривается задача воспроизведения непрерывного случайного процесса $y(t)$ по его равноотстоящим дискретным значениям $y(iT)$ $(i=0,1,..., N)$ с заданной среднеквадратической погрешностью δ_0. Подобная задача возникает при обработке данных радиотелеметрии, при измерении сигнала приборами, дискретными по своему принципу действия, а также при накоплении данных об исследуемом многомерном объекте и с последующей их обработкой на ЭЦВМ.

По имеющимся статистическим характеристикам [в частности, по автокорреляционной функции $R_{yy}(t_1, t_2)$] известными методами [1—4] может быть рассчитан оптимальный в смысле выбранного критерия точности (или практически оптимальный) алгоритм интерполяции, оценена среднеквадратическая погрешность воспроизведения σ, являющаяся функцией интервала дискретизации T, а также выбран максимально допустимый интервал из условия

$$\sigma(T)=\delta_0. \qquad (1)$$

Так как среднеквадратическая погрешность является монотонной функцией интервала T и $\lim\limits_{T\to 0}\sigma(T)=0$, уравнение (1) всегда имеет решение. Однако при достаточно высоких требованиях к точности, т. е. при сравнительно небольших значениях δ_0, определяемый таким образом интервал дискретизации является весьма малым, что приводит к целому ряду технических трудностей, связанных с расширением пропускной способности канала связи, его помехозащищенностью и т. д. Эти трудности неизмеримо возрастают в многомерных системах сбора информации, когда сигнал от каждого из датчиков поступает на общий коммутатор с последовательным опросом каналов, имеющий ограниченную максимальную частоту опроса f_0.

В этом случае при равномерном опросе необходимый интервал дискретизации T, определяемый из уравнения (1), должен быть не меньше m/f_0, где m — число каналов информации. Это вызывает необходимость увеличения интервала дискретизации T за счет получения некоторой дополнительной информации о свойствах восстанавливаемых процессов.

Целью настоящей работы является исследование возможности увеличения шага дискретизации непрерывного процесса $y(t)$ путем использования значений некоторого сигнала, статистически связанного с интерполируемым процессом.

2. Пусть $y(t)$ и $x(t)$ — стационарные случайные процессы с известными автокорреляционными функциями $R_{yy}(\tau)$, $R_{xx}(\tau)$ и взаимной корреляционной функцией $R_{yx}(\tau)$. Пусть известны также дискретные последовательности значений сигнала $y(t)$ в моменты времени $iT(i=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ldots)$: $\ldots y(-NT),\ldots,\ y(-T),\ y(0),\ y(T),\ldots;\ y(NT),\ldots,$ а сигнала $x(t)$ в моменты времени $\left(i+\frac{1}{2}\right)T\colon \ldots x\left(-NT+\frac{T}{2}\right),\ldots,x\left(-\frac{T}{2}\right),x\left(\frac{T}{2}\right),\ldots,$ что соответствует подключению измеряемых сигналов к регистрирующему устройству поочередно через равные интервалы времени («двухканальный коммутатор»).

Задача формулируется следующим образом: необходимо определить максимально возможный интервал дискретизации T непрерывного процесса $y(t)$, позволяющий восстановить этот процесс по дискретным значениям $y(iT)$ и $x\left(iT+\frac{T}{2}\right)$ с заданной среднеквадратической погрешностью воспроизведения δ_0.

Возможны два пути решения этой задачи: а) определение максимально возможного шага дискретизации при заданном алгоритме воспроизведения из условия (1); б) синтез оптимального алгоритма восстановления, являющегося функцией интервала T, с последующим определением этого интервала из условия (1). Рассмотрим эти варианты последовательно.

3. Оценку восстанавливаемого сигнала $\hat{y}$ в произвольный момент времени $t=nt+\varepsilon T$ (n — целое число; $0\leqslant\varepsilon<1$) будем искать в виде линейного функционала относительно дискретных значений сигналов $x(t)$ и $y(t)$:

$$\hat{y}(nT+\varepsilon T)=\sum_{i=-N+1}^{N} a_i(\varepsilon)\,y\,[(n+i)T]+\sum_{j=-M+1}^{M} b_j(\varepsilon)\,x\left[n-\Delta+\frac{1}{2}+\right.$$
$$\left.+j)T\right],\tag{2}$$

где $a_i(\varepsilon)$ и $b_j(\varepsilon)$ — весовые коэффициенты (коэффициенты интерполяции); $2N$ — число используемых для восстановления дискретных значений процесса $y(t)$; $2M$ — число используемых значений процесса $x(t)$; величина Δ выбирается таким образом, чтобы значения сигнала $x(t)$, по которым строится оценка $\hat{y}(nT+\varepsilon T)$, были бы наиболее сильно коррелированы с восстанавливаемым сигналом. Формально это означает, что при $0\leqslant\varepsilon<\frac{1}{2}$ значение Δ, равное целому числу отсчетов k, выбирается из условия

$$R_{yx}(kT)=\max_{k}.\tag{3}$$

Если же $\varepsilon\geqslant\frac{1}{2}$, то $\Delta=k-1$, где k по-прежнему определяется из (3). Дисперсия погрешности получаемой оценки $\hat{y}$ определяется в этом случае следующим соотношением:

$$\sigma_{\varepsilon}^{2}(\varepsilon T)=\sigma_{y}^{2}+\sum\sum_{i,r=-N+1}^{N} a_i(\varepsilon)\,a_r(\varepsilon)\,R_{yy}[(i-r)T]+$$

$$+\sum_{j,l=-M+1}^{M}\sum b_j(\varepsilon)\,b_l(\varepsilon)\,R_{xx}\,[(j-l)\,T]-2\sum_{i=-N+1}^{N}a_i\,(\varepsilon)\,R_{yy}\,[(i-\varepsilon)\,T]-$$

$$-2\sum_{j=-M+1}^{M}b_j(\varepsilon)\,R_{yx}\left[\left(-j+\frac{1}{2}+\Delta+\varepsilon\right)T\right]+2\sum_{i=-N+1}^{N}\sum_{j=-M+1}^{M}\times$$

$$\times\,a_i\,(\varepsilon)\,b_j(\varepsilon)\,R_{yx}\left[\left(i-j+\Delta+\frac{1}{2}\right)T\right],\qquad(4)$$

т. е. не зависит от момента времени nT.

Задача определения способа интерполяции сводится, таким образом, к нахождению таких весовых коэффициентов $a_i\,(\varepsilon)$ и $b_j\,(\varepsilon)$, при которых дисперсия погрешности интерполяции (4) будет минимальной.

При заданных величинах N и M, а также фиксированном T условие минимума приводит к следующей системе $2(N+M)$ уравнений, линейных относительно коэффициентов $a_i\,(\varepsilon)$ и $b_j(\varepsilon)$:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{r=-N+1}^{N}a_r(\varepsilon)\,R_{yy}\,[(i-r)\,T]+\sum_{j=-M+1}^{M}b_j(\varepsilon)\,R_{yx}\,\Big[(i-j)\,T-\\ \displaystyle\qquad\qquad-\frac{T}{2}+\Delta\,T\Big]=R_{yy}\,[(i-\varepsilon)\,T];\qquad(5)\\ \displaystyle\sum_{i=-N+1}^{N}a_i\,(\varepsilon)\,R_{yx}\left[(i-j)\,T-\frac{T}{2}+\Delta\,T\right]+\sum_{l=-M+1}^{M}b_l(\varepsilon)\,R_{xx}\times\\ \displaystyle\qquad\times\,[(j-l)\,T]=R_{yx}\left[(j-\varepsilon)\,T-\frac{T}{2}+\Delta\,T\right].\end{cases}$$

Решение этой системы при больших N и M в общем случае затруднительно, однако известно [1], что при интерполяции только по дискретным данным самого восстанавливаемого процесса практически оптимальной для широкого класса случайных процессов является линейная интерполяция по двум соседним значениям, т. е. при восстановлении процесса $y(t)$ в момент времени $t=nT+\varepsilon T$ целесообразно использовать два значения $y(nT)$ и $y[(n+1)\,T]$, учет же более удаленных дискретных значений нецелесообразен. Очевидно, аналогичные рассуждения справедливы и для сигнала $x(t)$.

Исходя из этих соображений, оценим возможности алгоритма интерполяции процесса $y(t)$, осуществляющего построение оценки $\hat{y}\,(nT+\varepsilon T)$ по четырем точкам: $y(nT)$, $y[(n+1)\,T]$, $x\left[\left(n-\Delta-\frac{1}{2}\right)T\right]$, $x\left[\left(n-\Delta+\frac{1}{2}\right)T\right]$ $\left(\text{полагая, что } \varepsilon<\frac{1}{2}\right)$, т. е. будем разыскивать алгоритм интерполяции в виде

$$\hat{y}\,(nT+\varepsilon\,T)=a_0\,(\varepsilon)\,y\,(nT)+a_1\,(\varepsilon)\,y\,[(n+1)\,T]+b_0\,(\varepsilon)\,x\,\times$$

$$\times\left[\left(n-\Delta-\frac{1}{2}\right)T\right]+b_1\,(\varepsilon)\,x\left[\left(n-\Delta+\frac{1}{2}\right)T\right].\qquad(6)$$

Система линейных алгебраических уравнений (5) в этом случае имеет вид

$$
\begin{cases}
a_0 R_{yy}(0) + a_1 R_{yy}(T) + b_0 R_{yx}\left[\left(\Delta + \frac{1}{2}\right)T\right] + \\
\quad + b_1 R_{yx}\left[\left(\Delta - \frac{1}{2}\right)T\right] = R_{yy}(\varepsilon T); \\
a_0 R_{yy}(T) + a_1 R_{yy}(0) + b_0 R_{yx}\left[\left(\Delta + \frac{3}{2}\right)T\right] + \\
\quad + b_1 R_{yx}\left[\left(\Delta + \frac{1}{2}\right)T\right] = R_{yy}[(1-\varepsilon)T]; \\
a_0 R_{yx}\left[\left(\Delta + \frac{1}{2}\right)T\right] + a_1 R_{yx}\left[\left(\Delta + \frac{3}{2}\right)T\right] + b_0 R_{xx}(0) + \\
\quad + b_1 R_{xx}(T) = R_{yx}\left[\left(\Delta + \frac{1}{2} + \varepsilon\right)T\right]; \\
a_0 R_{yx}\left[\left(\Delta - \frac{1}{2}\right)T\right] + a_1 R_{yx}\left[\left(\Delta + \frac{1}{2}\right)T\right] + b_0 R_{xx}(T) + \\
\quad + b_1 R_{xx}(0) = R_{yx}\left[\left(\Delta - \frac{1}{2} + \varepsilon\right)T\right],
\end{cases} \tag{7}
$$

а выражение для дисперсии погрешности оценки (6) с учетом системы уравнений (7) определяется следующим соотношением:

$$
\sigma_e^2(\varepsilon) = R_{yy}(0) - a_0 R_{yy}(\varepsilon T) - a_1 R_{yy}[(1-\varepsilon)T] - b_0 R_{yx} \times
$$
$$
\times \left[\left(\Delta + \frac{1}{2} + \varepsilon\right)T\right] - b_1 R_{yx}\left[\left(\Delta - \frac{1}{2} + \varepsilon\right)T\right]. \tag{8}
$$

Рассмотрим далее частный случай, когда авто- и взаимнокорреляционные функции процессов $y(t)$ и $x(t)$ могут быть записаны в виде

$$
R_{yy}(\tau) = A_1^2 e^{-\alpha_1|\tau|}; \quad R_{xx}(\tau) = A_2^2 e^{-\alpha_2|\tau|}; \quad R_{yx}(\tau) = \Lambda A_1 A_2 e^{-\alpha_3|\tau - \tau_1|};
$$
$$
\Lambda \in [0, 1]. \tag{9}
$$

При этом для простоты положим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Нетрудно видеть, что искомые весовые коэффициенты в этом случае при $\alpha T \ll 1$ равны:

$$
a_0 = 1 - 2\varepsilon + \frac{4\varepsilon(1-\Lambda^2)}{(1-\Lambda^2)(4-\Lambda^2) - \alpha T(4 - 6\Lambda^2 + \Lambda^4)};
$$
$$
a_1 = \frac{2\varepsilon(1-\Lambda^2)(2-\Lambda^2)}{(1-\Lambda^2)(4-\Lambda^2) - \alpha T(4 - 6\Lambda^2 + \Lambda^4)}; \tag{10}
$$
$$
b_0 = -\frac{\Lambda A_1}{A_2} \frac{2\varepsilon(1-\Lambda_2)}{(1-\Lambda^2)(4-\Lambda^2) - \alpha T(4 - 6\Lambda^2 + \Lambda^4)};
$$
$$
b_1 = 2\varepsilon \frac{\Lambda A_1}{A_2}\left\{1 - \frac{(1-\Lambda^2)(3-\Lambda^2)}{(1-\Lambda^2)(4-\Lambda^2) - \alpha T(4 - 6\Lambda^2 + \Lambda^4)}\right\},
$$

а дисперсия погрешности интерполяции соответственно равна

$$
\sigma_e^2(\varepsilon) = A_1^2 \{1 - a_0(1 - \varepsilon\alpha T) - a_1[1 - (1-\varepsilon)\alpha T] - \Lambda b_0 \times
$$
$$
\times \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\alpha T\right] - \Lambda b_1\left[1 - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\alpha T\right]\right\}. \tag{11}
$$

Отметим, что (10) и (11) получены в предположении $0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$. Если же $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}$, то выражения получаются аналогичными.

На рис. 1 сплошными линиями изображены графики зависимости дисперсии погрешности интерполяции при различных значениях коэффициента взаимной корреляции λ. Как и следовало ожидать, при $\lambda = 1$ дисперсия погрешности восстановления, осуществляемого в соответствии с алгоритмом (6), равна дисперсии погрешности интерполяции только по данным сигнала $y(t)$, получаемым с удвоенной частотой (в этом случае, как легко видеть, $a_1 = b_0 = 0$; $a_0 = 2\varepsilon$, $b_1 = 2\varepsilon$ при $\varepsilon < \frac{1}{2}$ и $a_0 = b_2 = 0$; $a_1 = 2\varepsilon$, $b_1 = 1 - 2\varepsilon$ при $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}$). Если же $\lambda = 0$, т. е. каналы некоррелированы (самый «неблагоприятный» случай), то значения сигнала $x(t)$ не используются ($b_0 - b_1 = 0$) и восстановление осуществляется лишь по данным сигнала $y(t)$.

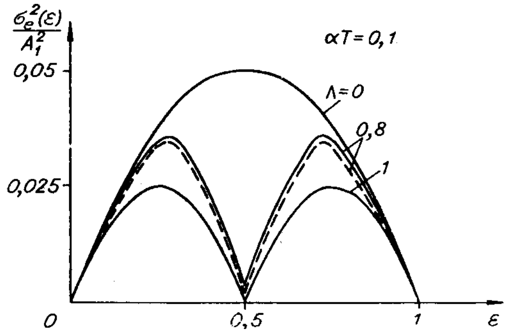

Рис. 1.

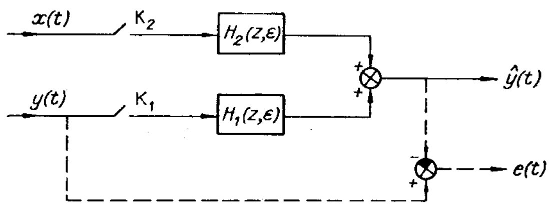

Рис. 2.

Таким образом, при каждом фиксированном значении λ и заданной допустимой погрешности воспроизведения δ_0 может быть определен максимально возможный шаг дискретизации T_1 из уравнения

$$\sigma^2(\Lambda, T_1) = \delta_0^2, \tag{12}$$

где $\sigma^2(\Lambda, T) = \max\limits_{\varepsilon} \{\sigma_e^2(\varepsilon, \Lambda, T)\}$; $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$; σ_e^2 определяется выражением (11). При этом значение T_1 в зависимости от коэффициента λ лежит в промежутке $(T/2, T)$, где T — интервал дискретизации, определяемый уравнением (1).

4. Перейдем теперь к рассмотрению оптимальных алгоритмов восстановления, используя хорошо разработанный аппарат z-преобразования [5] и известные методы синтеза многомерных дискретных систем [6].

Определение оптимального алгоритма обработки данных сводится к нахождению таких передаточных функций $H_1(z,\varepsilon)$ и $H_2(z, \varepsilon)$ (рис. 2), которые обеспечивают минимум среднеквадратической ошибки (т. е. максимум верности воспроизведения [7])

$$\sigma_e^2(\varepsilon) = \overline{[y(nT + \varepsilon T) - y(nT + \varepsilon T)]^2} = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{\Gamma} \Phi_{ee}(z, \varepsilon) \frac{dz}{z}, \tag{13}$$

где черта сверху означает осреднение по множеству реализаций; контур интегрирования Γ представляет собой окружность единичного радиуса на комплексной плоскости z; $\Phi_{ee}(z,\varepsilon)$ — спектральная плотность дискретных значений ошибки.

Учитывая несинфазность замыкания ключей K_1 и K_2 (ключ K_1 замыкается в моменты времени $t_1 = ..., -NT, ..., -T, 0, T, ..., NT, ...,$ а ключ K_2 соответственно в моменты времени $t_2 = \ldots -\left(N-\frac{1}{2}\right)T, \ldots, -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}, \ldots$) и следуя основным соотношениям работы [8], получим следующую систему уравнений относительно операторов H_1 и H_2 для $0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{\Gamma} \delta K_1(z,\varepsilon)\,[K_1(z,\varepsilon)\,\Phi_{yy}(z,0) + K_2(z,\varepsilon)\,z^{-1}\,\Phi_{yx} \times \\ \qquad \times (z, 1/2) - \Phi_{yy}(z,\varepsilon)]\,\frac{dz}{z} = 0; \\ \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{\Gamma} \delta K_2(z,\varepsilon)\,[K_1(z,\varepsilon)\,\Phi_{xy}(z,\varepsilon) + K_2(z,\varepsilon)\,\Phi_{xx}(z,0) - \\ \qquad - \Phi_{xy}\left(z, \varepsilon + \frac{1}{2}\right)\Big]\,\frac{dz}{z} = 0, \end{cases} \tag{14}$$

где в зависимости от значений параметра ε передаточные функции $H_2(z,\varepsilon)$ и $K_i(z,\varepsilon)\,(i = 1,2)$ соответственно равны:

$$H_2(z,\varepsilon) = \begin{cases} z^{-1}\,H_2\left(z, \varepsilon + \frac{1}{2}\right); & 0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}; \\ H_2\left(z, \varepsilon - \frac{1}{2}\right); & \frac{1}{2} \leqslant \varepsilon < 1; \end{cases}$$

$$K_1(z,\varepsilon) = H_1(z,\varepsilon);\ 0 \leqslant \varepsilon < 1; \tag{15}$$

$$K_2(z,\varepsilon) = \begin{cases} H_2\left(z, \varepsilon + \frac{1}{2}\right); & 0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}; \\ H_2\left(z, \varepsilon - \frac{1}{2}\right); & \frac{1}{2} \leqslant \varepsilon < 1, \end{cases}$$

где $\delta K_i(z,\varepsilon)$ — произвольные вариации передадаточных функций.

Так как решается задача интерполяции (т. е. на передаточные функции $H_1(z,\varepsilon)$ и $H_2(z,\varepsilon)$ не накладываются условия «физической реализуемости» [6]), то из системы (14) непосредственно следует:

$$\begin{cases} K_1(z,\varepsilon)\,\Phi_{yy}(z,0) + K_2(z,\varepsilon)\,z^{-1}\,\Phi_{yx}\left(z, \frac{1}{2}\right) - \Phi_{yy}(z,\varepsilon) = 0; \\ K_1(z,\varepsilon)\,\Phi_{xy}\left(z, \frac{1}{2}\right) + K_2(z,\varepsilon)\,\Phi_{xx}(z,0) - \Phi_{xy}\left(z, \varepsilon + \frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Таким образом, определение оптимального алгоритма воспроизведения сигнала $y(t)$ по дискретным значениям свелось к решению системы линейных алгебраических уравнений (16) при $0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$. Нетрудно видеть, что при $\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon < 1$ аналогичные преобразования приводят к следующей системе уравнений:

$$
\begin{cases}
K_1(z,\ \varepsilon)\,\Phi_{yy}(z,\ 0) + K_2(z,\ \varepsilon)\,\Phi_{yx}\left(z,\ \frac{1}{2}\right) - \Phi_{yy}(z,\ 0) = 0; \\
K_2(z,\ \varepsilon)\,z^{-1}\,\Phi_{xy}\left(z,\ \frac{1}{2}\right) + K_2(z,\ \varepsilon)\,\Phi_{xx}(z,\ 0) - \Phi_{xy}\left(z,\ \varepsilon - \frac{1}{2}\right) = 0.
\end{cases} \tag{16'}
$$

Можно показать, что минимальное значение дисперсии ошибки, зависящее от параметра ε, определяется соотношением $\left(0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$

$$
\sigma^2_{e_{\min}}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma}\left[\Phi_{yy}(z,\ 0) - K_1(z,\ \varepsilon)\,\Phi_{yy}\left(z^{-1},\ \varepsilon + \frac{1}{2}\right) - K_2(z,\ \varepsilon)\,\Phi_{yx}\left(z^{-1},\ \varepsilon + \frac{1}{2}\right)\right]\frac{dz}{z}, \tag{17}
$$

где $K_1(z, \varepsilon)$ и $K_2(z, \varepsilon)$ в зависимости от значения ε вычисляются по формулам (15).

В случае, когда статистические свойства сигналов задаются соотношениями (9), оптимальные преобразования при $0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$ имеют вид:

$$
H_1(z,\ \varepsilon) = \frac{\alpha_1\alpha_2 z\,(z\varepsilon + 1 - \varepsilon) - \frac{1}{2}\Lambda^2\alpha_3^2\left[z^2\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right) + z + \frac{1}{2} - \varepsilon\right]}{\alpha_1\alpha_2 z - \frac{1}{4}\Lambda^2\alpha_3^2(z^2 + 2z + 1)};
$$

$$
H_2(z,\ \varepsilon) = \frac{A_1\Lambda\,\alpha_1\alpha_3\varepsilon\,(z^2 - 2z + 1)\,z^{-k}}{2A_2\left[\alpha_1\alpha_2 z - \frac{1}{4}\Lambda^2\alpha_3^2(z^2 + 2z + 1)\right]}. \tag{18}
$$

Таким образом, искомые передаточные функции являются дробно-рациональными функциями z, которые стандартными методами, описанными, в частности, в [1], могут быть представлены в виде разложения в ряд по положительным и отрицательным степеням z, причем коэффициенты разложения убывают как члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Представляется интересным сравнить эффективность полученного оптимального преобразования (18) с четырехточечной интерполяцией, рассмотренной в п. 3.

На рис. 1 (см. штриховые линии) приведены графики зависимости дисперсии погрешности восстановления от ε при различных значениях λ. Из сравнения этих кривых с кривыми, данными на этом же рисунке сплошными линиями, видно, что четырехточечная интерполяция в разобранном примере является практически оптимальной.

В этом можно было бы и непосредственно убедиться, разлагая функции H_1 и H_2 (18) при сделанных предположениях (п. 3) в ряд по степеням z и сравнивая коэффициенты разложения с соответствующими значениями a_0, a_1, b_0 и b_1 [формулы (10)].

5. Перейдем теперь к рассмотрению задачи о выборе частоты опроса в задаче контроля параметров объекта. В этом случае при исследовании многопараметрических объектов типичной является ситуация, когда некоторые обычно медленно меняющиеся величины (например, напряжение стабилизации, температура и давление в термобарокамере в квазистационарном режиме и т. д.) требуется поддержи-

вать в заданном диапазоне, а о ряде других величин, как правило, более быстро меняющихся, надлежит иметь подробные сведения. Если измерения производятся приборами, дискретными по своему принципу действия, то естественным является желание «информативные» каналы опрашивать часто, а каналы, по которым поступают сведения о контролируемых параметрах, по возможности редко.

Исследуем целесообразность использования в этом случае сведений об авто- и взаимнокорреляционных функциях исследуемых и контролируемых параметров объекта, полагая эти параметры стационарными случайными процессами. При этом ограничимся рассмотрением двухпараметрического объекта, у которого один из параметров $x(t)$ является информативным, а другой — $y(t)$ — контролируемым. Считаем априорно известными авто- и взаимнокорреляционные функции $R_{xx}(\tau)$, $R_{yy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$, причем взаимнокорреляционная функция $R_{yx}(\tau)$ принимает максимальное значение в момент времени $\tau=\Delta$ (в общем случае $\Delta\neq 0$). Измерения процесса $x(t)$ производятся в моменты времени iT ($i=0,\pm1,\pm2,\ldots$), а интервал дискретизации T определяется из условия верности воспроизведения процесса $x(t)$ [1]; при этом T желательно выбирать таким, чтобы Δ/T было бы целым числом (что, как правило, возможно).

Пусть задано некоторое исходное значение $y(0)$. Требуется на основе имеющихся данных определить интервал T^*, через который необходимо сделать повторное изменение (и в случае необходимости корректировку значения) этого параметра, если максимально допустимое его отклонение от начального значения δ_0.

Известно [4], что оптимальный алгоритм экстраполяции при использовании только одного известного значения $y(0)$ определяется следующим выражением:

$$\hat{y}_1(t) = r_{yy}(t)\, y(0), \tag{19}$$

где $r_{yy}(t)$ — нормированная автокорреляционная функция процесса $y(t)$; $r_{yy}(t) = \dfrac{R_{yy}(t)}{R_{yy}(0)}$.

Дисперсия погрешности оценки в этом случае оценивается из соотношения

$$\sigma^2_{e_1} = R_{yy}(0)\,[1 - r^2_{yy}(t)], \tag{20}$$

а интервал дискретизации T^* вычисляется как корень алгебраического уравнения

$$\frac{\rho\delta_0^2}{R_{yy}(0)} = 1 - r^2_{yy}(T^*), \tag{21}$$

где коэффициент ρ определяется интервалом доверительной вероятности P и законом распределения параметра y (в частности, если можно считать, что $y(t)$ — нормальный процесс, а $P=0{,}997$, то $\rho=1/9$; если $y(t)$ равномерно распределен в некотором интервале, а $P=1$, то $\rho=1/3$ и т. д.).

Учет имеющихся дискретных значений процесса $x(t)$, статистически связанного с процессом $y(t)$, будем производить добавлением к экстраполированному таким образом значению $\hat{y}_1(t)$ слагаемого, весовая доля которого в формировании оценки возрастает с ростом t [т. е. по мере удаления от известного значения $y(0)$], так что алгоритм формирования оценки имеет вид

$$\hat{y}_2(t) = r_{yy}(t)\, y(0) + r_{yx}(\Delta)\,(1 - r_{yy}(t))\, \frac{\sqrt{R_{yy}(0)}}{\sqrt{R_{xx}(0)}}\, x(t-\Delta), \tag{22}$$

где

$$r_{yx}(\Delta) = \frac{R_{yx}(\Delta)}{\sqrt{R_{yy}(0)\, R_{xx}(0)}}.$$

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению, отметим, что значения процесса $x(t)$ известны нам лишь в дискретные моменты времени $t = iT$, поэтому, строго говоря, мы и оценку можем находить лишь в моменты времени, кратные T (ведь величина Δ, как уже отмечалось выше, также кратна T), однако это ограничение представляется несущественным, так как на практике, как правило, интересуются значениями контролируемых параметров в моменты поступления данных от «информативных» датчиков, а кроме того, шаг дискретизации T исследуемого процесса $x(t)$ позволяет при необходимости восстановить его значения с требуемой степенью точности в любой момент времени.

Дисперсия погрешности получаемой оценки при помощи алгоритма (22), как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\sigma^2_{e_2}(t) = R_{yy}(0)\,\{[1 - r^2_{yy}(t)]\,[1 - r^2_{yx}(\Delta)] + 2r_{yx}(\Delta - t)\, r_{yx}(\Delta)\, r_{yy}(t) \times \times [1 - r_{yy}(t)]\}. \tag{23}$$

Найдем изменение точности полученной оценки по сравнению с оценкой, определяемой в соответствии с (19), т. е. вычислим разность дисперсий $\Delta\sigma^2_e(t) = \sigma^2_{e_1}(t) - \sigma^2_{e_2}(t)$:

$$\Delta\sigma^2_e(t) = R_{yy}(0)\, r_{yx}(\Delta)\,[1 - r_{yy}(t)]\,\{r_{yx}(\Delta)\,[1 + r_{yy}(t)] - 2r_{yx}(\Delta - t)\, r_{yy} \times \times (t)\} \geqslant 2r_{yx}(\Delta)\,[1 - r_{yy}(t)]\,[r_{yx}(\Delta) - r_{yx}(\Delta - t)]\, R_{yy}(0) r^*_{yy}. \tag{24}$$

Из этого соотношения видно, что $\Delta\sigma^2_e(t) \geqslant 0$ при любых значениях t (так как все сомножители в правой части неравенства, по крайней мере, неотрицательны). Это свидетельствует о том, что построение оценки $\hat{y}_2(t)$ в соответствии с алгоритмом (22) всегда ведет к увеличению шага дискретизации T^*.

Рассмотрим теперь возможности его увеличения в предположении, что автокорреляционная функция контролируемого процесса может быть представлена в виде $R_{yy}(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

Максимально возможный интервал дискретизации, определяемый при использовании алгоритма (19), в этом случае равен

$$T^*_1 = \frac{\rho\delta_0^2}{2A^2\alpha} \tag{25}$$

в предположении, что $\alpha T^*_1 \ll 1$.

С учетом реализации статистически связанного с $y(t)$ процесса $x(t)$ шаг дискретизации T^*_2 определяется из соотношения (23) как корень уравнения

$$\rho\delta_0^2 = 2T^*_2 A^2 \alpha\,\{1 - r_{yx}(\Delta)\,[r_{yx}(\Delta) - r_{yx}(\Delta - T^*_2)]\}. \tag{26}$$

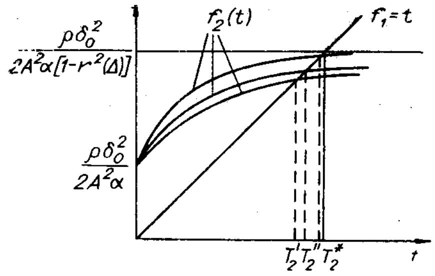

Рис. 3.

На рис. 3 приведено графическое решение этого уравнения, найденное как точка пересечения прямой линии $f_1=t$ и одной из семейства кривых $f_2(t)$, построенных при различных нормированных взаимнокорреляционных функциях, где $f_2(t)=$

$$= \frac{\rho\delta_0^2}{2A^2\alpha\{1-r_{yx}(\Delta)\,[r_{yx}(\Delta)-r_{yx}(\Delta-t)]\}}.$$

Из выражения (26), а также рис. 3 видно, что при использовании алгоритма (22) для получения оценки допустимый шаг дискретизации достигает наибольшего значения для тех процессов, у которых взаимнокорреляционная функция является быстро убывающей. Очевидно, что применение предлагаемого алгоритма является наиболее целесообразным именно в этом случае, так как в рассмотренном способе восстановления используется только одно значение сигнала $x(t)$. Величина шага дискретизации T_2^* при этом приближено может быть найдена из соотношения

$$T_2^* = \frac{\rho\delta_0^2}{2A^2\alpha\,[1-r_{yx}^2(\Delta)]}. \tag{27}$$

Таким образом, выигрыш, определяемый отношением $\xi=\frac{T_2^*}{T_1^*}$, при сделанных допущениях приблизительно равен

$$\xi \simeq \frac{1}{1-r_{yx}^2(\Delta)}, \tag{28}$$

т. е. если $r_{yx}=0{,}7$, то $\xi\simeq 2$; если $r_{yx}=0{,}8$, то $\xi\simeq 2{,}8$; если $r_{yx}=0{,}9$, то $\xi\simeq 5$ и т. д.

Применение более сложных алгоритмов восстановления, несомненно позволит получить дополнительное увеличение шага дискретизации, однако, как показано в настоящей работе, в ряде случаев сказывается эффективным применение даже такого простого способа оценки, как предложенный.

ВЫВОДЫ

Использование взаимных корреляционных функций при решении задачи воспроизведения сигналов по дискретным данным позволяет существенно повысить верность воспроизведения или увеличить шаг дискретизации при заданной верности воспроизведения лишь для довольно высоких значений коэффициента взаимной корреляции.

Четырехточечная интерполяция является практически оптимальной для рассмотренного класса сигналов.

Учет функции взаимной корреляции в задачах контроля представляется весьма целесообразным, так как он позволяет значительно уменьшить необходимую частоту опроса датчиков контролируемых каналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Розов, И. Б. Челпанов. О погрешности интерполяции случайной функции по дискретным данным.— Измерительная техника, 1968, № 2.
2. Ю. Л. Розов, О. Н. Тихонов, И. Б. Челпанов. О выборе оптимального способа интерполяции и оптимального интервала дискретности.— Автометрия, 1968, № 5.
3. В. А. Виттих, А. Н. Гинзбург. Некоторые алгоритмы обработки измерительной информации с целью сокращения ее объема.— Научные труды вузов Поволжья, вып. 4. Куйбышев, 1968.
4. Н. Г. Голант, Е. Е. Жуковский, Р. А. Полуэктов. Прогнозирование температуры как задача оптимальной экстраполяции.— Труды Агрофизического института, № 11. Л., Гидрометеоиздат, 1968.
5. Э. А. Джури. Импульсные системы автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1963.
6. В. Я. Катковник, Р. А. Полуэктов. Многомерные дискретные системы управления. М., «Наука», 1966.
7. Элементы технической кибернетики, вып. 77. М., «Наука», 1968.
8. В. Я. Катковник. Обобщение задачи синтеза многоканального дискретно-непрерывного фильтра.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 2.

Поступила в редакцию
6 января 1971 г.