А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 3 1971

УДК 621.372

Р. Д. БАГЛАЙ
(Новосибирск)

ОСОБЕННОСТИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ЭЙЛЕРА

Для успешного применения нелинейных элементов в измерительной и управляющей технике необходимо знать их основные характеристики. Если одна из них известна, то обычно путем вычислений можно определить ту другую, которая представляет интерес в данной конкретной задаче. При решении электротехнических задач чаще всего интересуются так называемыми статической и дифференциальной характеристиками. В настоящей статье покажем, что преобразование дифференциальной характеристики в статическую, когда первая из них задана сигналом, можно выполнить с помощью специального вида устройств, описываемых уравнениями Эйлера. Поскольку такого рода устройства отличаются рядом свойств (отсутствуют переходные процессы, сохраняется «спектр» степеней преобразуемого сигнала и др.), интересных с общетехнической точки зрения, мы начнем рассуждения с несколько более общих позиций, применяя необходимый для этого формализм. Затем изложим в качестве примера нашу задачу.

Покажем, что преобразователь, соответствующий дифференциальному уравнению Эйлера

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, t^i\, y(t)^{(i)} = f(t), \tag{1}$$

где a_i — действительные числа, t — время, может работать без переходных процессов. Выявим характерные особенности этого типа преобразователей и некоторые возможности практического их применения и реализации. Установим также ограничения, которые при этом приходится налагать на коэффициенты a и на входной сигнал $f(t)$.

По понятным физическим мотивам будем в дальнейшем рассматривать только такие уравнения типа (1), которые имеют устойчивое решение и в которых все n — производные от решения $y(t)$ — ограничены при $t>0$. Следовательно, при t, близком к нулю, иначе при $t=+0$, $y(+0)=f(+0)$. Общее устойчивое решение уравнения (1) для случая действительных корней p_i характеристического уравнения можно записать в виде

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n-q} C_i\, t^{-p_i} + \sum_{i=\nu}^{n} C_i\, (\ln t)^{i-\nu}\, t^{-p_\nu} + \varphi(t), \tag{2}$$

где p_ν — корень q-й кратности; $\nu=n-q+1$; $\varphi(t)$ — частное решение уравнения (1). При ограниченных $y(+0)$ и $\varphi(+0)$ все постоянные интегрирования $C_i \to 0$. Действительно, пусть $p_1 > p_2 > \ldots > p_\nu > \ldots > p_{n-q}$ Если теперь умножить (2) на t^{p_1} и учесть, что произведение $t^{p_1 - p_\nu} (\ln t)^\gamma$, $\gamma = 0, 1, \ldots, q-1$, при t, близком к нулю, ведет себя так же, как и $t^{p_1 - p_\nu}$, то, поскольку $y(+0)$ и $\gamma(+0)$ ограничены, получим $C_1 \to 0$. Повторяя аналогичные рассуждения для $p_2, \ldots, p_\nu, \ldots, p_{n-q}$, убеждаемся, что все $C_i \to 0$. Следовательно, переходный процесс в такого рода устройствах не возникает. Эти же рассуждения применимы и в случае комплексных корней.

Далее выясним характерные особенности преобразования сигнала $f(t)$ с помощью устойчивого преобразователя типа (1). Для этого нам понадобится следующее утверждение, доказательство которого дано в приложении: необходимым условием устойчивости преобразователя (1) является положительность всех a_i, $i=0, 1, \ldots, n$. Это утверждение может оказаться полезным (позволяет сократить вычисления) при решении задачи синтеза преобразователя (1) по заданным $f(t)$ и $\varphi(t)$. Заметим, что задача синтеза решается как обычно методом проб.

1. Первую особенность выясним, положив $f(t) = B_k t^k$. Можно убедиться [см. также (5)], что при этом частное решение

$$\varphi(t) = \frac{B_k}{k! \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(k-1)}} t^k = Dt^k; \quad k \geqslant i. \tag{3}$$

Например, когда $k=3$, $n=2$, уравнение $a_2t^2y'' + a_1ty' + a_0y = B_3t^3$ удовлетворяется при

$$y = \varphi(t) = \frac{B_3}{6a_2 + 3a_1 + a_0} t^3.$$

Как видим, при воздействии на вход преобразователя (1) степенного сигнала вида $f(t) = Bt^k$ на выходе возникает степенной сигнал того же вида Dt^k, т. е. в выходном сигнале нет составляющих степеней t, отличных от t^k. Инвариантность преобразования (1) к показателю степенного сигнала аналогична инвариантности обычного линейного преобразования к частоте синусоидального сигнала.

2. Если $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k t^k$ — целая функция (полином), то частное решение $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} \beta_k t^k$. В отличие от обычных преобразователей, описываемых дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, здесь «спектр» степеней сигнала $\varphi(t)$ остается таким же, как и в сигнале $f(t)$, а изменяются лишь коэффициенты α_k, т. е. составляющие более низких степеней не «загрязняются» за счет присутствия во входном сигнале $f(t)$ составляющих более высоких степеней. Следовательно, с помощью рассматриваемого преобразователя можно осуществить преобразование сигнала $f(t)$, описываемого полиномом с некоторыми коэффициентами α_k, в другой сигнал, $\varphi(t)$, описываемый полиномом тех же степеней, но с иными коэффициентами — β_k. Например, когда $f(t) = B_3t^3 + B_1t + B_0$, то уравнение $a_2t^2y'' + a_1ty' + a_0y = B_3t^3 + B_1t + B_0$ удовлетворяется при $y = \varphi(t) = \frac{B_3}{6a_2 + 3a_1 + a_0} t^3 + \frac{B_1}{a_1 + a_0} t + \frac{B_0}{a_0}$. Здесь входной сигнал $f(t)$, не содержащий t^2, преобразуется в

сигнал $\varphi(t)$, также не содержащий t^2, т. е. «спектр» степеней сигнала не изменился, но изменились весовые коэффициенты B. Причем преобразование осуществляется теоретически без возникновения переходного процесса.

Установим теперь некоторые ограничения. Для этого найдем связь между α, β и a. Подставим i-ю производную от частного решения

$$\varphi(t)^{(i)} = \sum_{k=i}^{m} \beta_k \frac{k!}{(k-i)!} t^{k-i} \tag{4}$$

в уравнение (1). Имеем

$$\sum_{k=i}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_i \beta_k \frac{k!}{(k-i)!} t^k = f(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k t^k. \tag{5}$$

Приравнивая коэффициенты при t^k, получим

$$\beta_k k! \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(k-i)!} = \alpha_k (k \geqslant i). \tag{6}$$

Теперь нетрудно установить, что a выражается через α и β рекуррентным соотношением. Действительно,

$$k = 0;\ \beta_0 a_0 = \alpha_0;\ a_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0};$$

$$k = 1;\ \beta_1 (a_0 + a_1) = \alpha_1;\ a_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} - a_0;$$

. . . .

$$\begin{matrix} k = m \\ (m > n) \end{matrix} \beta_m m! \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{(m-i)!} + \frac{a_n}{(m-n)!} \right) = \alpha_m;$$

$$a_n = (m-n)! \left(\frac{\alpha_m}{\beta_m m!} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{(m-i)!} \right). \tag{7}$$

Но a положительна, следовательно, знаки при соответствующих коэффициентах α и β должны оставаться одноименными. Это ограничение отражает необходимое (но не достаточное) условие преобразования сигнала $f(t)$. Достаточное условие можно получить из условия устойчивости преобразователя (1) (см. замечание в приложении).

Применение и возможную техническую реализацию преобразователя проиллюстрируем на простом примере.

Пример. Связь между статической $\psi(t) = \frac{u(t)}{t}$ и дифференциальной $\eta(t) = \frac{d\,u(t)}{dt}$ характеристиками однозначной дифференцируемой нелинейной зависимости $u(t)$ выражается уравнением Эйлера первого порядка*

$$[t\psi(t)]' = t\frac{d\psi(t)}{dt} + \psi(t) = \eta(t). \tag{8}$$

Нередки случаи (например, при исследовании датчиков, выполненных на нелинейных реактивных элементах: индуктивные катушки и др.), когда дифференциальная характеристика $\eta(t)$ может сниматься в ви-

* Заметим также, что уравнение (8) описывает связь между током и напряжением на конденсаторе, емкость которого возрастает от нуля пропорционально времени.

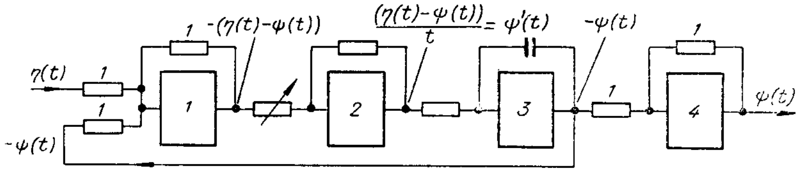
де сигнала, если подключить к датчику линейно нарастающий ток (напряжение). Наряду с $\eta(t)$ обычно интерес представляет также статическая характеристика $\psi(t)$. Тогда $\psi(t)$ можно определить с помощью преобразователя (8).

Исходя из физических соображений для характеристик пассивных нелинейных элементов уравнение (8) можно доопределить; $u(0)=0$; $\eta(+0)=\psi(+0)$ ограничены. При этих условиях в решении

$$t\,\psi(t)=\int\limits_{\varepsilon}^{t}\eta(t)\,dt+C, \tag{9}$$

где ε — величина, близкая к нулю, постоянная интегрирования $C\to\to\psi(\varepsilon)$ при $t\to\varepsilon$. И если $\varepsilon\to+0$, то $C\to 0$. Следовательно, в преобразователе (8) переходный процесс не возбуждается.

Техническая реализация преобразователя может быть разнообразной и заслуживает специального рассмотрения. Здесь приведем структурную схему (см. рисунок) модели уравнения (8) на операционных усилителях (*1* — суммирование; *2* — деление на t; *3* — интегрирование;



4 — инвертирование). Особенность решения (9) в точке $\varepsilon=0$, $t=0$ отражается в модели бесконечно большим коэффициентом усиления блока *2* при $t=0$.

В заключение отметим, что полученные выше соотношения можно рассматривать как исключительно простой алгоритм для вычисления решения уравнений вида (1).

Приложение

Известно*, что решение $y(t)$ неоднородного уравнения (1) при $t>0$ одновременно является решением $Y(x)$, где $x=\ln t$, уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,D(D-1)\ldots(D-i+1)\,Y(x)=f(e^x) \tag{10}$$

с постоянными коэффициентами. Здесь $D=\dfrac{d}{dx}$. Представим (10) в виде

$$\sum_{i=0}^{n} A_i\,D^i\,Y(x)=f(e^x), \tag{11}$$

где, как можно показать,

$$A_0=a_0;$$

$$A_i=\sum_{l=0}^{n-i}(-1)^l S^l_{i+l-1}\,a_{i+l};\quad i=1,2,\ldots,n; \tag{12}$$

S^l_{i+l-1} — числа, которые получаются, если все элементы каждого сочетания из $i+l-1$ первых чисел натурального ряда по l перемножить, а полученные произведения суммировать (например, $S^3_{2+3-1}=1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot4+1\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4$), причем полагаем, что $S^0_{i-1}=1$.

---

* Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (стр. 137). М., «Наука», 1965.

В соответствии с (12) соотношение между коэффициентами уравнений (1) и (10) представим в матричной форме

$$\overline{A}=\|c_{ij}\|\,\overline{a}, \tag{13}$$

где

$$c_{ij}=\begin{cases}(-1)^{j-i}\,S_{j-1}^{i-1} \text{ при } i\leqslant j;\\ 0 \text{ при } i>j \ (i,j=1,2,\ldots,n).\end{cases} \tag{14}$$

Отметим некоторые свойства элементов C_{ij} верхней треугольной матрицы $\|c_{ij}\|$ *

$$\sum_{i=1}^{j} c_{ij}=0 \text{ при } j>1; \tag{15}$$

$$|c_{ij}|=(j-1)\,|c_{i,j-1}|+|c_{i-1,j-1}|; \tag{16}$$

$$\sum_{i=0}^{j}|c_{ij}|=|c_{1,j+1}|; \tag{17}$$

Здесь $|c_{ij}|$ — абсолютная величина элемента c_{ij}. Матрица $\|c_{ij}\|$ неособенная ($S_{j-1}^{0}=1$); обращая, ее можно записать так:

$$\overline{a}=\|d_{ij}\|\overline{A}. \tag{18}$$

Можно показать, что элементы d_{ij} связаны между собой рекуррентным соотношением

$$d_{ij}=i\cdot d_{i,j-1}+d_{i-1,j-1}, \tag{19}$$

причем

$$d_{ij}=1 \text{ при } i=j \tag{19а}$$

и, согласно (15),

$$d_{1j}=1. \tag{19б}$$

Как видно из соотношений (19), (19а), (19б), элементы d_{ij} треугольной матрицы в (18) являются положительными числами. Следовательно, когда коэффициенты A положительны — необходимое условие устойчивости решения уравнения (10), положительными будут и коэффициенты a уравнения (1). Таким образом, справедливо утверждение: необходимым условием устойчивости преобразователя (1) является положительность коэффициентов a_i, $i=0,1,\ldots,n$. Достаточность может быть проверена обычным образом после вычисления коэффициентов A.

Поступила в редакцию
2 июля 1970 г.,
окончательный вариант —
31 мая 1971 г.

---

* Справедливость трех приведенных тождеств (15)—(17) проверялась для достаточно высокого порядка матрицы $\|c_{ij}\|$.