АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1971

ТЕОРИЯ СИСТЕМ ВОСПРИЯТИЯ И ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

УДК 621.317.080

М. В. САВЕНКОВ
(Москва)

СТАТИСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СТАЦИОНАРНОСТИ СЛУЧАЙНОЙ ВРЕМЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Решение многих задач, связанных с изучением случайных временных последовательностей $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{Nj})$, может быть значительно упрощено, если последовательности x_j стационарны. С такими задачами приходится, в частности, сталкиваться при создании автоматических систем контроля (АСК) параметров технических изделий в процессе эксплуатации. Целесообразно предусмотреть в создаваемом автомате возможность расчета прогноза изменения параметров технического изделия на основе получающихся данных об их контроле.

Вычислительное устройство АСК обычно позволяет делать в отводимое для контроля время только простые математические расчеты, например сложение результатов измерения параметров с некоторыми весами. Таким образом, в АСК реально может быть осуществлен только линейный прогноз вида

$$\hat{x}_{ij} = \sum_{\nu=1}^{l} \beta_\nu x_{i-\nu,j} . \qquad (1)$$

Подбором коэффициентов β_ν можно сделать прогноз с помощью линейной формы (1) оптимальным (в среднеквадратическом), если случайные результаты измерений параметра x образуют гауссовскую последовательность. Для этого необходимо провести громоздкие расчеты на универсальной ЦВМ, использовав в качестве исходных данных вид корреляционной функции $R(p)$ случайной последовательности или результаты предварительного сбора сведений об изменении контролируемого параметра x в процессе эксплуатации.

Коэффициенты β_ν в общем случае будут зависеть от момента контроля i, т. е. в памяти АСК необходимо держать разные наборы весов $\beta_{\nu i}$ и вызывать их для расчета прогноза в зависимости от наработки контролируемого технического изделия. Однако если прогнозируемая последовательность стационарна, то все β_ν не зависят от i и для любого технического изделия с любой наработкой построение прогноза потребует запоминания лишь l чисел β_ν.

При выполнении предварительных расчетов β_ν на основании статистического материала об эксплуатации изделий, разумеется, целесообразно проверить гипотезу о стационарности x_j, так как даже решение о включении прогнозирования в программу АСК может зависеть от результатов такой проверки. Целью данной заметки является построение алгоритма проверки гипотезы о стационарности случайной временной последовательности, которая задана набором, содержащим L реализаций x_j:

$$\{x_{ij}\} = \begin{Bmatrix} x_{11} & x_{21} \dots x_{N1} \\ x_{21} & x_{22} \dots x_{N2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{1L} & x_{2L} \dots x_{NL} \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Подобную матрицу из L реализаций случайных последовательностей с нулевым математическим ожиданием нетрудно получить по сведениям, накопленным в процессе эксплуатационного контроля однотипных технических устройств, с помощью методики, данной в [1].

По исходному статистическому материалу (2) строим оценки для корреляционной функции

$$R_i(p) = \frac{\sum_{j=1}^{L} x_{ij}\, x_{i+p,j}}{\sum_{j=1}^{L} x_{ij}^2}. \tag{3}$$

Если последовательности x_j стационарны, то все $R_i(p)$ суть случайные оценки одной и той же величины $R_i(p)$. Построить статистический критерий значимости колебаний $R_i(p)$ непосредственно на основании оценок (3) нельзя, так как $R_i(p)$ и $R_n(p)$ при $n<i+l$ зависимы, поскольку для их расчета используется один и тот же материал — последовательность зависимых величин x_{ij}. Здесь l — наибольшее значение p, при котором $R(p)$ еще значимо отличается от нуля.

Однако по тем же исходным данным (2) можно получить набор независимых оценок для частных коэффициентов корреляции

$$R_i(p/i+1,\ i+2 \dots i+p-1,\ i+p+1 \dots i+m),$$

где

$$m = \begin{cases} l-p, & \text{если } p \leqslant l/2; \\ p\quad, & \text{если } p > l/2, \end{cases}$$

так как это оценки корреляции значений последовательностей x_j, отстоящих друг от друга на p шагов с исключением влияния значений, связанных с обоими сомножителями x_{ij} и $x_{i+p,j}$. Зависимость между собой по одному сомножителю в парах $x_{ij}\ x_{i+p,j}$ и $x_{nj}\ x_{n+p,j}$ для $n \leqslant i+m$ при условии независимости первой пары от сомножителей второй пары, т. е. если $n>i+m$, не вызывает статистической связи оценок $R_i(p/i+1 \dots i+m)$ и $R_n(p/n+1 \dots n+m)$. Для получения оценок частных коэффициентов корреляции [2, стр. 44] строим матрицу корреляций процесса x, начиная с i-й точки:

$$\{R_i(m)\} = \begin{Bmatrix} R_i(0) & R_i(1) \dots R_i(m) \\ R_i(1) & R_i(0) \dots R_i(m-1) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ R_i(m) & R_i(m-1) \dots R_i(0) \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Перестановкой на второе место p-го столбца и p-й строки матрицы (4) приводим ее к виду

$$\{R_i(m)\} = \begin{Bmatrix} \{R_i(0,p)\}\,\{R_i(1\ldots m/p)\} \\ \{R'_i(1\ldots m/p)\}\,\{R_i(m-1/p)\} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} R_i(0) & R_i(p) & R_i(1) & R_i(2) & \ldots R_i(m) \\ R_i(p) & R_i(0) & R_i(m) & R_i(m-1) & \ldots R_i(1) \\ R_i(1) & R_i(m) & R_i(0) & R_i(1) & \ldots R_i(m-1) \\ R_i(2) & R_i(m-1) & R_i(1) & R_i(0) & \ldots R_i(m-2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_i(m) & R_i(1) & R_i(m-1) & R_i(m-2) & \ldots R_i(0) \end{Vmatrix}.$$

Элемент матрицы

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma_{11}\}\,\{\sigma_{1p}\} \\ \{\sigma_{p1}\}\,\{\sigma_{pp}\} \end{Bmatrix} = \{R_i(0,p)\} - \{R_i(1\ldots m/p)\}\,\{R_i^{-1}(m-1/p)\}\,\{R'_i(1\ldots m/p)\}, \tag{5}$$

стоящий в правом верхнем углу, является ковариацией i-го и $(i+p)$-го значений x, не зависящей от $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p-1}, x_{i+p+1}, \ldots, x_{i+m}$. Искомый частный коэффициент корреляции получается по формуле

$$R_i(p/i+1\ldots i+m) = \frac{\{\sigma_{1p}\}}{\{\sigma_{11}\}\,\{\sigma_{pp}\}}. \tag{6}$$

Расчеты по формулам (5), (6) можно проделать при обработке статистических данных эксплуатационного контроля параметров технических устройств на ЦВМ небольшой мощности, поскольку l чаще всего невелико.

По полученным частным коэффициентам корреляции $R_1(p/2\ldots m+1)$, $R_2(p/3\ldots m+2)$, $\ldots$, $R_i(p/i+1\ldots i+m)\ldots$ можно проверить гипотезу об их неизменности по i, так как все они являются независимыми случайными величинами, имеющими распределение выборочного коэффициента корреляции, подсчитанного по выборке объема $L_i - p - 2$. При $L_i - p - 2 > 20$ погрешность будет незначительна [2, стр. 110], если использовать преобразование Фишера

$$z_i(p) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R_i(p/i+1\ldots i+m)}{1-R_i(p/i+1\ldots i+m)}, \tag{7}$$

полагая, что все $z_i(p)$ распределены нормально с дисперсией $(L_i - p - 2)^{-1}$.

Для проверки значимости колебаний $R_i(p)$ следует использовать [3] статистику γ_p, получающуюся суммированием квадратов нормальных случайных величин $z_i(p)$ с весами, пропорциональными дисперсиям:

$$\gamma_p = \sum_{i=1}^{N-p}(L_i - p - 1)\,z_i^2(p) - \frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{N-p}(L_i - p - 1)\,z_i(p)\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{N-p} L_i - p - 1}. \tag{8}$$

Статистика γ_p имеет χ^2-распределение с $N-p-1$ степенями свободы. При $N-p-1 > 25$ распределение γ_p хорошо аппроксимируется нормальным, и поэтому гипотезу о стационарности случайных последовательностей x_j следует принять с вероятностью α, если

$$\gamma_p < N - p - 1 + t_\alpha \sqrt{2(N-p-1)}\,, \tag{9}$$

где t_α — квантиль нормального распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Савенков. Оценка спектральной плотности случайной последовательности, заданной небольшим числом реализаций, для построения прогноза изменения параметров технических объектов в процессе эксплуатации.— Автометрия, 1970, № 5.
2. Т. Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.
3. А. Хальд. Математическая статистика с техническими приложениями. М., Изд-во иностр. лит., 1956.

Поступила в редакцию
31 мая 1971 г.